MAESTRO

CALCULUS 1

إعداد: أنس أبو زهرة

Anas Abu-Zahra
Anas Abu Zahra
0795476962

Pre-Calculus

ما الفرق بين المعادلة والإقتران ؟

$3x + 6 = 0$ (Equation معادلة)

في حال كان السؤال عبارة عن معادلة، فالمطلوب دائما اما solve the equation او find x وكلاهما المقصود به ايجاد قيمة او قيم x.

$f(x) = 3x + 6$ (Function اقتران)

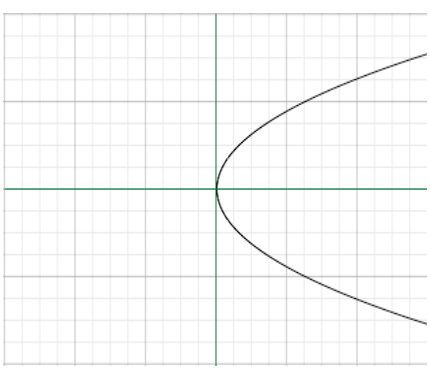
في حال كان السؤال عبارة عن اقتران فالمطلوب احد صفات الاقترانات التالية :

Domain , Range, even , odd , inverse.

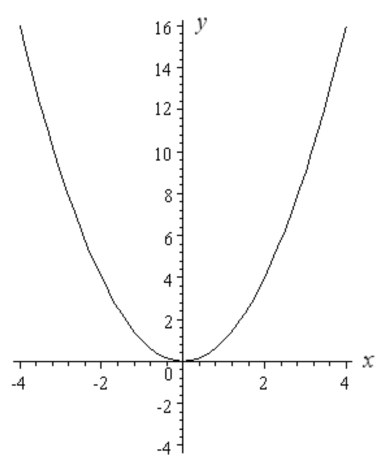
كيف نميز بين المعادلة والاقتران من خلال الرسم ؟

نستخدم اختبار الخط العمودي vertical line test

اذا قطعنا الرسمة مرة وحدى تكون الرسمة عبارة عن اقتران واذا قطعنا أكثر من مرة تكون الرسمة عبارة عن معادلة



equation



function

Solving the equations : حل المعادلات

معنى سؤال **solve the equation** هو ايجاد قيم **x**

1. Difference between two squares : الفرق بين مربعين

$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$

Examples :

1. $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

2. $x^2 - 3 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

3. $x^2 + 4 = 0 \quad No\ solution\ .$

---

2. Common factor : عامل مشترك

Examples :

1. $3x^3 - 6x = 0$

$3x\,(x^2 - 2) = 0$

$3x\,(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$

$x = 0\ ,,\ x = \sqrt{2}\ ,\ x = -\sqrt{2}$

---

3. Difference cubes and plus of cubes : فرق أو مجموع مكعبين

$\boldsymbol{(x^3 \pm a^3) = (x \pm a)(x^2 \mp xa + a^2)}$

Ex : Solve :

1. $x^3 + 8$?

$= (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

2. $x^3 - 64$?

$= (x-4)(x^2 + 4x + 16)$

4. Quadratic equation : المعادلة التربيعية

The Formula : $(\boldsymbol{ax^2 + bx + c})$

يوجد طريقتين لحل المعادلة التربيعية ، طريقة العوامل وطريقة القانون العام .

$Ex : Solve :$

1. $x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x + 3)(x + 2) = 0$

$x = -3 , x = -2$

---

2. $x^2 - 5x - 6 = 0$

Solution :

$= (x - 6)(x + 1) = 0$

$x = 6 \ , x = -1$

ملاحظة : تستخدم طريقة القانون العام إذا لم نتمكن من إيجاد العوامل بالطريقة السابقة ، ونستخدم القانون التالي :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

قبل استخدام القانون العام ، يجب التأكد من قيمة المميز والذي يمثل ما تحت الجذر .

1. $b^2 - 4ac > 0$ يوجد لدينا حلان مختلفان.

2. $b^2 - 4ac < 0$ لا تحلل المعادلة .

3. $b^2 - 4ac = 0$ تحلل المعادلة ويوجد حل واحد فقط .

$Ex : Solve :$

1. $x^2 + 5x + 6 = 0$

Solution :

$b^2 - 4ac = 25 - 4 * 1 * 6 = 1 > 0 \text{ ,} Two\ solutions$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 * 1 * 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$x = -2 \ \ , x = -3$

---

2. $x^2 + x + 1 = 0$

Solution :

$b^2 - 4ac = 0 \ ; \ \ 1 - 4 = -3 \ ,, \qquad No\ solution.$

---

3. $3x^2 + 4x + 1 = 0$

Solution :

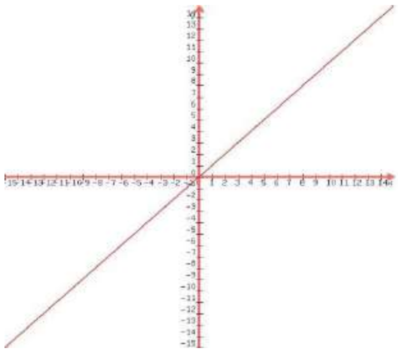
$b^2 - 4ac = 0 \ ; \ \ 16 - 12 = 4 \ > 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6}$$

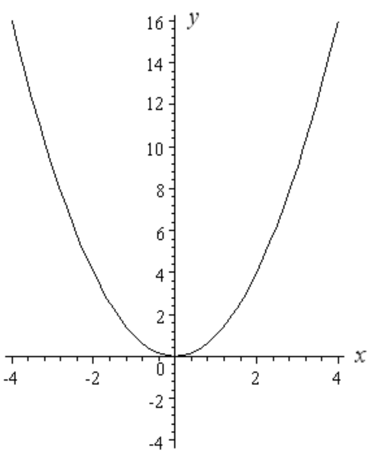
$x = -\frac{1}{3} \ , \qquad x = -1$

Chapter (1) Functions and models

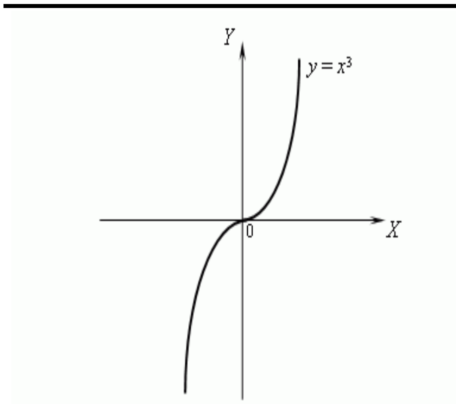
The graphs of functions



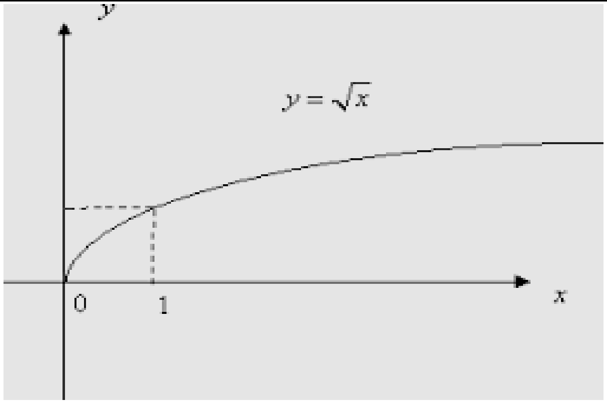
$$\boxed{y = x}$$



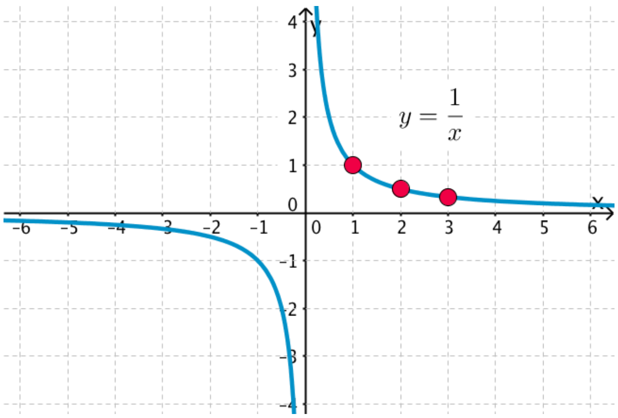
$$\boxed{y = x^2}$$



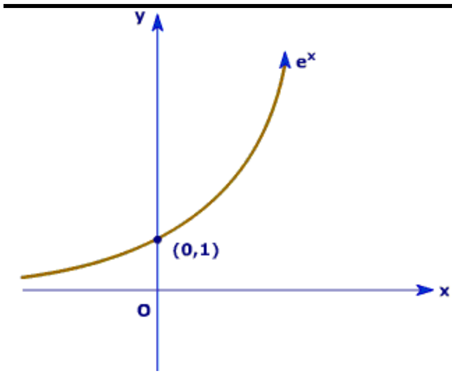
$$\boxed{y = x^3}$$



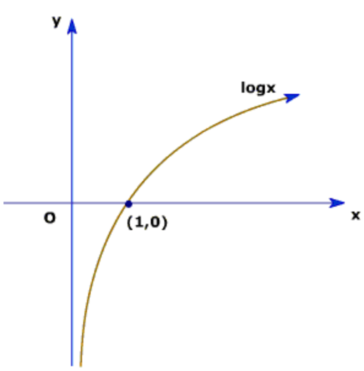
$$y = \sqrt{x}$$



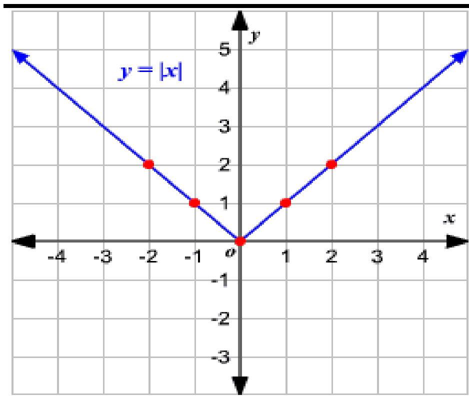
$$y = \frac{1}{x}$$



$$y = e^x$$

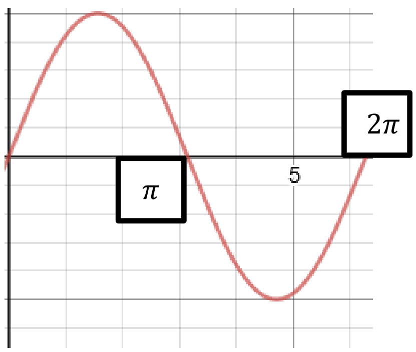


$y = lnx$ Or $y = \log x$



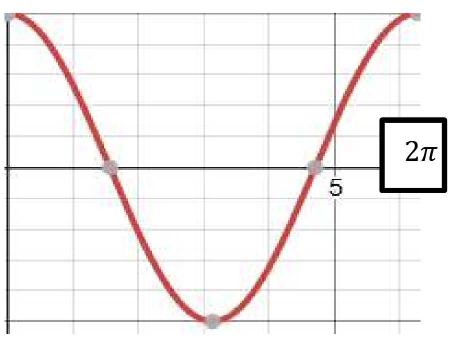
$y = |x|$

Sinx



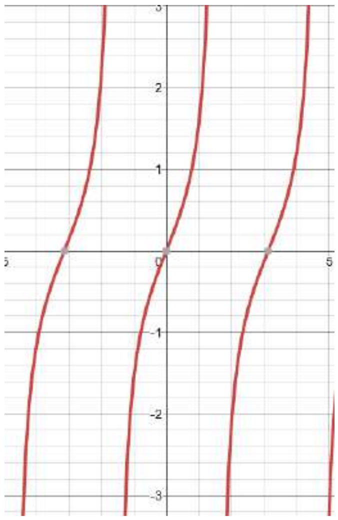
Period 2π

Cosx



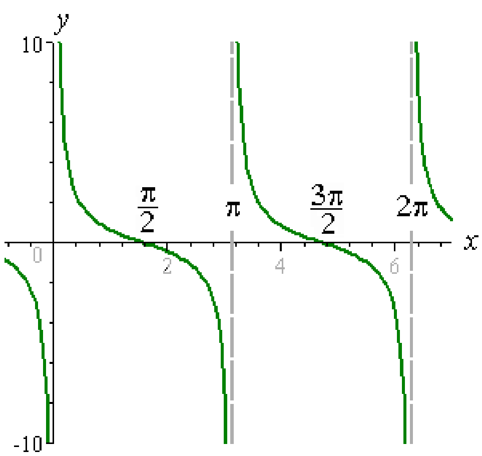
Period 2π

$3. Tan x$



$$\boxed{Period\ \pi}$$

$4. Cot x$



Domain : المجال

Note (1) :

أي اقتران لا يحتوي على جذر زوجي أو لوغاريتم أو مقام فإن مجاله $\mathbb{R}$ وهي اختصار ل all real numbers (جميع الأعداد الحقيقية) ويمكن التعويض عنها بالفترة $(-\infty, \infty)$.

Note (2) :

إذا احتوى الإقتران على جذر زوجي أو لوغاريتم ، فإن المجال هو الفترة أو الفترات الموجبة على خط الأعداد

Note (3):

إذا احتوى الإقتران على مقام ، فيجب علينا استثناء أصفار المقام من المجال .

$Ex : Find\ the\ domain :$

1. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$?

$Domain : \mathbb{R}$

---

2. $f(x) = 3^x + \sqrt[3]{x-1} + 5x^2 + |x-5|$?

$Domain : \mathbb{R}$

Types of Intervals أنواع

1- Closed Interval (الفترة المغلقة)

$[0,4]$ تعني هذه الفترة جميع الأعداد المحصورة بين 0،4 بالإضافة الى العددين 0،4

2- Open Interval (الفترة المفتوحة)

$(0,4)$ تعني هذه الفترة جميع الأعداد المحصورة بين 0،4 بدون العددين 0،4

3- Group (المجموعة)

$\{4,0\}$ تعني هذه الفترة فقط العددين 0،4 وتستخدم غالبا للتعبير عن اصفار المقام

- دائما نستخدم الفترة المفتوحة للتعبير عن ∞، $-\infty$

$3. f(x) = \sqrt{x-3}$?

Solution :

مشكلة واحدة (جذر زوجي)، خط أعداد واحد .

نساوي ما داخل الجذر بالصفر، ثم نضع النقاط على خط الأعداد وندرس الإشارة

$x - 3 = 0$; $x = 3$

------------------------------ +++++++++++++++++++

3

$D = [3, \infty)$

الفترات في الجذور عند الاعداد تكون مغلقة الا في حال كانت صفر مقام.

$4. f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} + 3x^2 - 5$?

مشكلة واحدة (جذر زوجي)، خط أعداد واحد ولا نهتم بالاقترانات الباقية .

$x^2 - 5x + 6 = 0$; $(x-3)(x-2) = 0$

$x = 3, x = 2$

+++++++++ ------------------ +++++++++++++++

2 3

$Domain = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

عند وجود فترتين موجبتين على خط الاعداد نأخذ الفترتين ونضع بينهما فاصلة او اتحاد

$5. g(x) = \log(4 - x^2)$?

مشكلة واحدة (لوغاريتم)، خط أعداد واحد .

------------------ +++++++++++ -----------------------

$4 - x^2 = 0$; $x = 2, x = -2$

-2 2

$Domain\ (-2,2)$

الفترات في اللوغاريتم دائما مفتوحة

6. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+3x+2}$?

Solution :

مشكلة واحدة (المقام)، نستثني اصفار المقام .

$x^2+3x+2=0\ ;\quad (x+2)(x+1)=0\ ;\quad x=-2\,, x=-1$

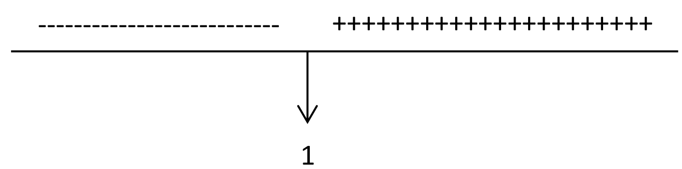
$Domain : \mathbb{R}-\{-2,-1\}$

---

7. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}$?

مشكلتين (جذر + مقام)، اذا خط أعداد للجذر + استثناء اصفار المقام.

$x-1=0\ ;\ \ x=1$



$zeros\ :\ \ x^2-1=0\ ;\ \ x=1,-1$

$Domain :\ [1,\infty)-\{1\}=(1,\infty)$

---

8. $y = \dfrac{3-x}{1-\dfrac{3}{x}}$?

Solution :

- يوجد مشكلة المقام فقط لكن علينا الانتباه لوجود مقامين

$x=0\ ;\quad 1-\dfrac{3}{x}=0\ ;\ \dfrac{3}{x}=1\ ;\ \ x=3$

$Domain : \mathbb{R}-\{\,0{,}3\,\}$

Note (4) :

إذا احتوى السؤال على أكثر من جذر أو لوغاريتم ، فإن لكل جذر أو لوغاريتم خط أعداد خاص به ثم نجد المنطقة المشتركة الموجبة على خط الأعداد

$9. f(x) = \sqrt{3-x} - \log(x-2)$?

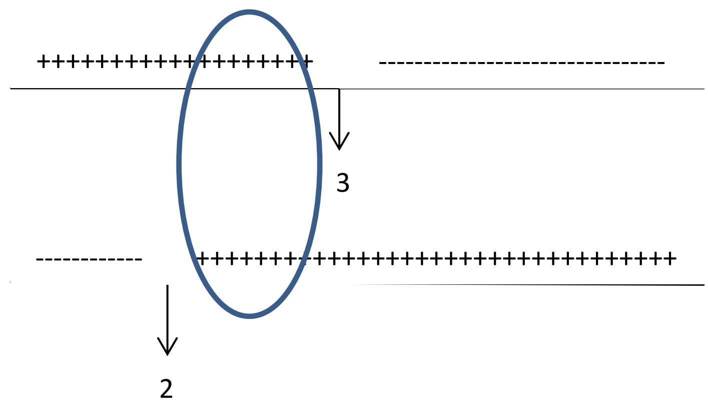
Solution :

$3 - x = 0 \;;\; x = 3$

$x - 2 = 0 \;; x = 2$

$Domain\ (2, 3]$

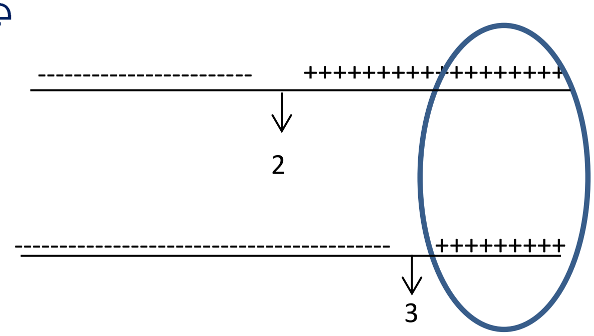
وهي تمثل المنطقة المشتركة الموجبة



- أغلقت الفترة عند ال (3) لأنها من الجذر .
- فتحت الفترة عند ال(2) لأنها من الlog .

$10. f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$?

جذرين اذا خطي أعداد واستثناء صفر المقام



$x - 2 = 0 \;\;;\;\; x = 2$

$x - 3 = 0 \;;\;\; x = 3$

$Domain\ [3, \infty) - \{3\} = (3, \infty)$

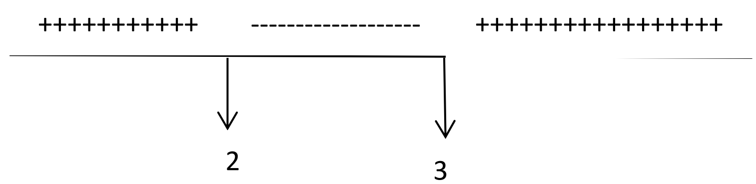
الفترة من 3 الى انفينيتي تمثل المنطقة المشتركة الموجبة

$$11. f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-3}} \ ?$$

Solution :

جذر واحد اذا خط واحد فقط، ونستثني اصفار المقام .

$x - 2 = 0 \ ; \ \ x = 2 \ \ ;; \quad x - 3 = 0 \ \ ; \ \ x = 3$



$Domain = (-\infty, 2] \cup [3, \infty) - \{3\} = (-\infty, 2] \cup (3, \infty)$

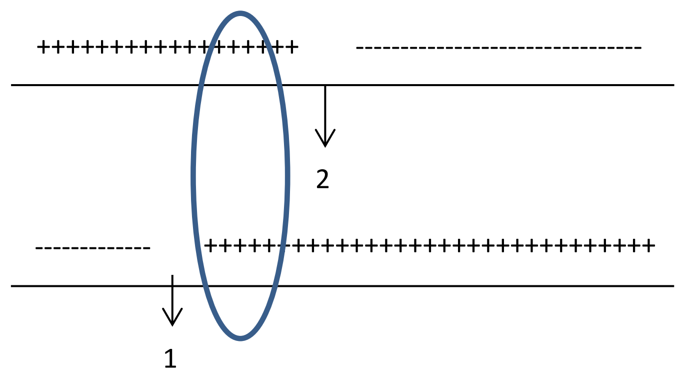
$$12. f(X) = \sqrt{2-x} + \frac{x^2+3}{\sqrt{x-1}} \ ?$$

Solution :

جذرين اذا خطي اعداد واستثناء اصفار المقام (3 مشاكل)

$2 - x = 0 \ \ ; x = 2$

$x - 1 = 0 \ \ ; \ \ x = 1$



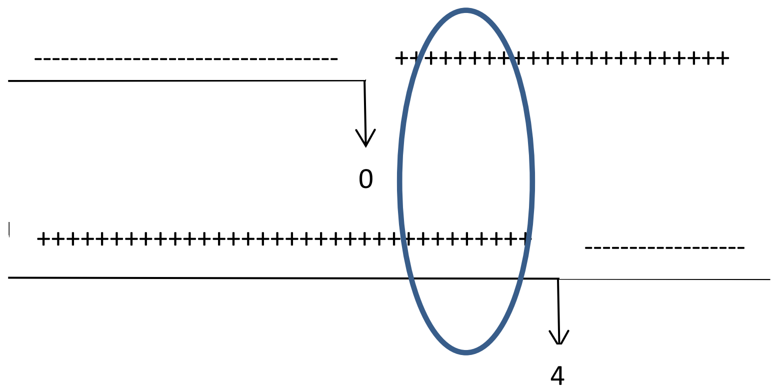
$$Domain = [1,2] - \{1\} = (1,2]$$

$13.\ g(x) = \sqrt{2-\sqrt{x}}\ ?$

هنا لدينا جذرين ايضاً ، اذا خطين أعداد .

$x = 0$

$2-\sqrt{x}=0\ \ ;\sqrt{x}=2\ \ ;x=4$



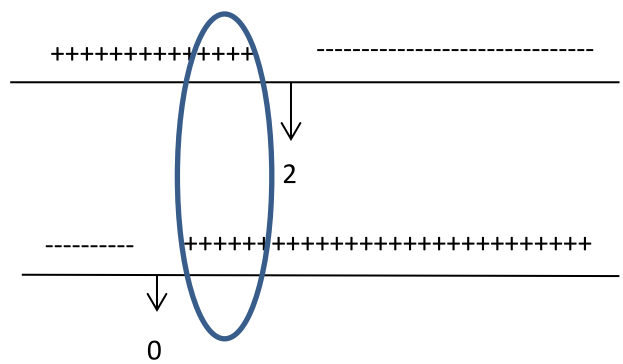
$Domain = [0,4]$

$14.\ f(x) = \frac{\log(2-x)}{\sqrt[4]{x}-1}\ ?$

Solution :

$2-x=0\ \ ;\ \ x=2$

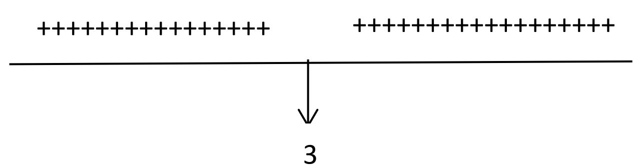
$x=0$



$Domain = [0,2)-\{1\}$

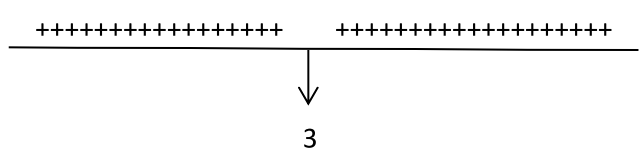
$15.\ f(x) = \sqrt{|x-3|}\ ?$

$x-3=0\ ;;;x=3$



$Domain :\ \mathbb{R}$

$16.\ f(x) = \log|x-3|\ ?$



$x-3=0\ \ ;\ \ x=3$

$Domain\ \mathbb{R}-\{3\}$

تم استثناء العدد 3 لكونه يصفر اللوغاريتم

17. $f(x) = \dfrac{cosx}{1 - sinx}$?

Solution :

$1 - sinx = 0\,;\ \ sinx = 1\ \ ;\ \ x = \dfrac{\pi}{2}\ \ ;;Domain = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right\}$

---

18. $Let\ f(x) be\ a\ function\ with\ D = (-3,5)\ and\ Range\ [2,\infty)\ \ , then$

$Find\ the\ domain\ of\ \ g(x) = 2 - 4f(1 - 2x)$?

Solution :

في هذا المثال ، القيم التي تؤثر على المجال هي الموجودة داخل القوس الخاص ب **x** ، أما القيم الخارجية فهي تؤثر على المدى وستشرح لاحقا في درس المدى .

$-3 < 1 - 2x < 5\ \ ;\ \ -4 < -2x < 4\ \ ;\ \ 2 > x > -2\ \ ;\ \ (-2,2)$

Note (5) :

إذا احتوى السؤال على sin^{-1} أو cos^{-1} ، نجد المجال عن طريق حصر القوس الخاص بالزاوية بمتباينة بين $[-1,1]$

19. $f(x) = 3cos^{-1}(2x + 1) + \pi$?

Solution :

$-1 \leq 2x + 1 \leq 1\ \ ;\ \ -2 \leq 2x \leq 0\ \ ;\ \ -1 \leq x \leq 0\ \ ;\ \ Dom: [-1,0]$

---

20. $f(x) = \dfrac{sin^{-1}(2 - x)}{x - 1}$?

Solution :

متباينة للتعامل مع sin^{-1} ، مع الانتباه لضرورة استثناء صفر المقام .

$-1 \leq 2 - x \leq 1\ \ ;\ \ -3 \leq -x \leq -1\ \ ;\ \ 3 \geq x \geq 1\ \ [1,3]$

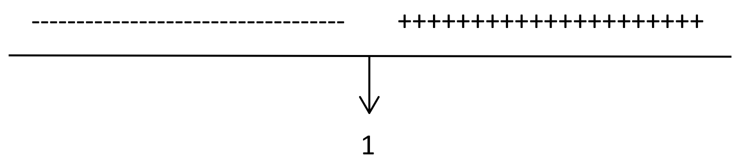
$$Domain = [1,3] - \{1\} = (1,3)$$

21. $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x-1}}$?

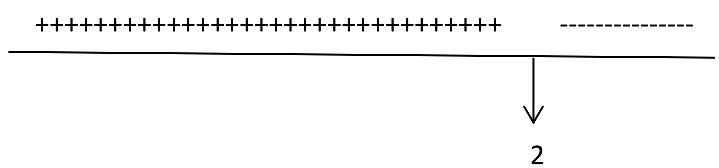
Solution :

جذرين اذا خطي أعداد .

$x-1=0$; $x=1$



$1-\sqrt{x-1}=0$; $\sqrt{x-1}=1$; $x-1=1$, $x=2$



$Domain = [1,2]$

---

22. $If\ f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $3 \le x \le 5$, $Find\ the\ domain\ of\ f(x)$?

Solution :

$Domain : [3,5] - \{2\}\ so\ [3,5]$

---

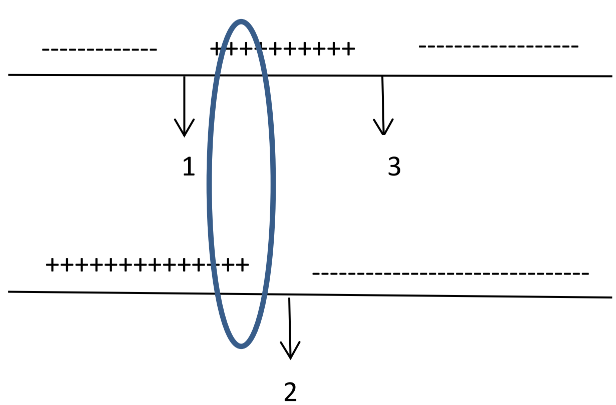
23. $If\ Domain\ g(x) = [1,3)$, $f(x) = \sqrt{2-x}$, $Then\ dom\ f * g\ (x)$?

Solution :

إذا أعطانا مجال جاهز دون ذكر قيمة الاقتران نضع المجال على خط الاعداد .

$g(x)$

$f(x) = \sqrt{2-x}$; $2-x=0$; $x=2$



$Domain : [1,2]$

$$24 .\ g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-6}}\ ?$$

مشكلة مقام فقط، لأن الجذر فردي

$2x - 6 = 0\ \ ; 2x = 6\ \ ;\ \ x = 3$

$Domain:\ \mathbb{R} - \{3\}$

$$25 .\ \ f(x): \begin{cases} -x^4 + 3\ , x \le 2 \\ x^2 + 9\ , x > 2 \end{cases}$$

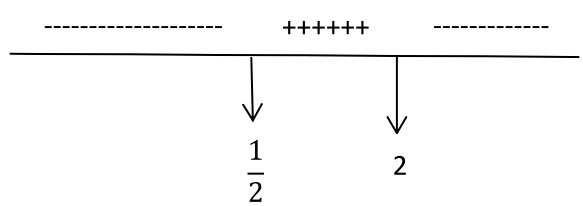
Solution :

مجال الإقتران المتشعب هو قراءة الفترات الموجودة داخله من الصغير للكبير

$Domain:\ \ (-\infty, 2] \cup (2, \infty)$

$26.\ The\ domain\ of\ f(x) = \ln\big((2-4x)(2x-4)\big)\,?$

خط أعداد واحد لكونه لوغاريتم واحد



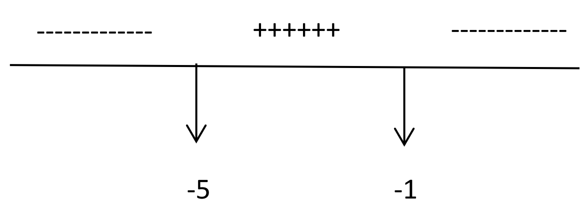
$Domain: \left(\frac{1}{2}\ , 2\ \right)$

$27. The\ domain\ of\ f(x) = \sqrt{2 - |x+3|}\ ?$

$2 - |x+3| = 0\ ;\ \ |x+3| = 2\ \ ; x + 3 = \pm 2$

$x + 3 = 2; x = -1$

$x + 3 = -2; x = -5$



$Domain:\ [-5, -1]$

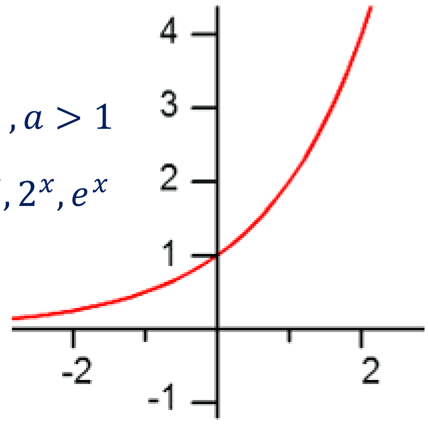
Exponential Functions (a^x): الاقترانات الاسية

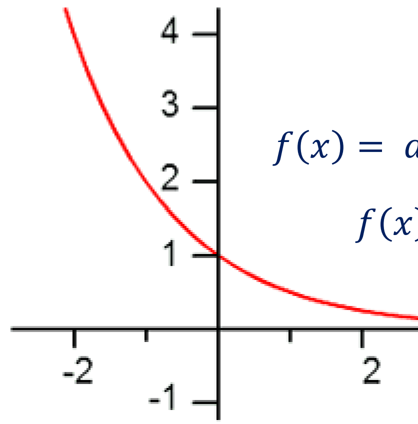
- قبل الدخول في الاقترانات الاسية علينا مراجعة قواعد الأسس في الجدول التالي :

	Law	Example
أي قيمة قوة 0 تساوي 1	$x^0 = 1$	$7^0 = 1$
عند تغيير مكان الاقتران بين البسط والمقام تعكس إشارة القوة	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$
في الضرب تجمع الأسس بشرط أن يكون الأساس نفسه	$x^m x^n = x^{m+n}$	$x^2x^3 = x^{2+3} = x^5$
في القسمة تطرح الأسس بشرط أن يكون الأساس نفسه	$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$\frac{x^4}{x^2} = x^2$
اذا كان الاقتران مرفوع لقوتين، يمكن تحويلها لقوة واحدة مكونة من حاصل ضرب القوتين	$x^{m^n} = x^{mn}$	$(x^2)^3 = x^{2\times3} = x^6$
اذا كانت القوة كسر يمكن تحويلها لجذر	$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$	$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

$f(x) = a^x , a > 1$

$f(x) = 3^x, 2^x, e^x$





$f(x) = a^x ,0 > a > 1$

$f(x) = 0.5^x$

1- اشهر اقتران أسي هو e^x حيث أن e هو العدد النيبري وقيمته تقريبا تساوي 2.71

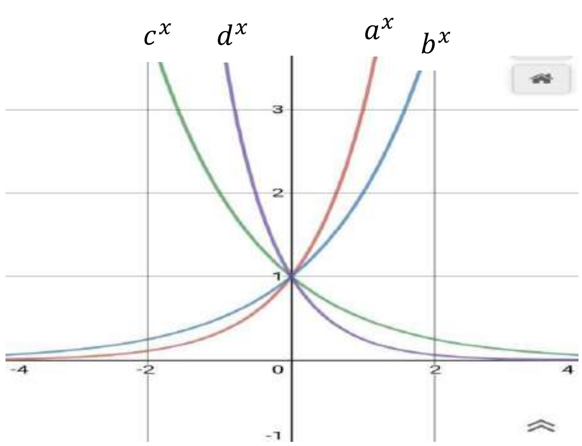
2- الاقتران الأسي لا يقطع الx-axis وهذا يعني أن $a^x \neq 0$

3- الاقتران الأسي لا يساوي سالب

$if\ e^x = -5\ then\ x\ has\ no\ solution\ in\ this\ equation$

Very important notes

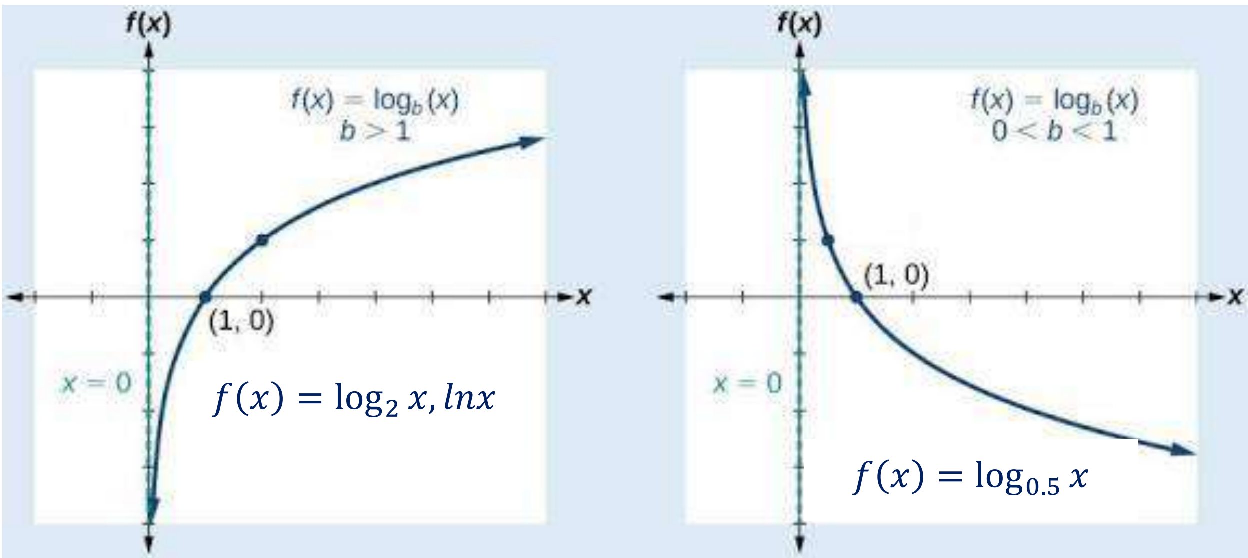
4- $a > b > c > d$



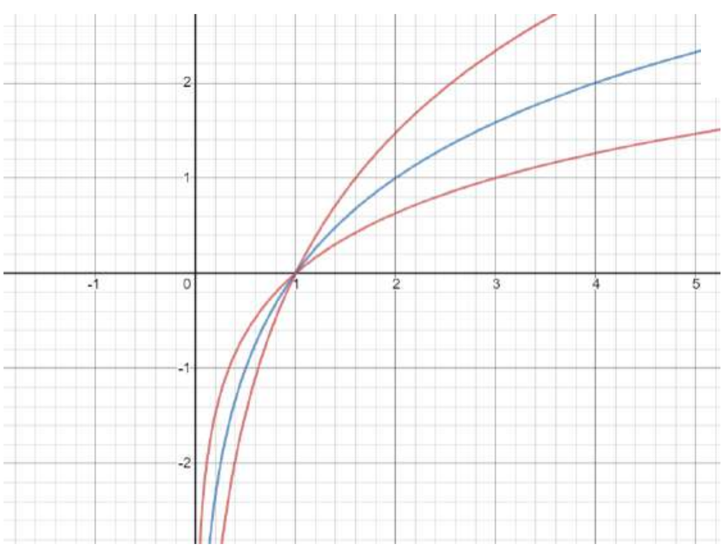
Logarithmic Functions : اللوغاريتمات

$$f(x) = \log_b a$$

$base$ (الاساس)



$\log_c x$



$\log_b x$

$\log_a x$

$$a > b > c$$

تذكر!!

- ما داخل اللوغاريتم يجب أن يكون موجبا دائما
- الأساس أيضا يجب أن يكون موجباً ، بالإضافة الى أنه يجب الا يساوي 1

Logarithm Rules

Rule 1 : $\log x = \log_{10} x$

Rule 2 : $\log_e x = \ln x$

Rule 3 : $\log_a a = 1$

Rule 4 : $\log_b x^m = m \log_b x$

Q : Find value of $\log_4 16$?

$\log_4 16 = \log_4 4^2 = 2 \log_4 4 = 2 \times 1 = 2$

Rule 5 : $\log a + \log b = \log(a \times b)$

شروط قاعدة 5،6

1- أن تكون الأساسات متساوية
2- أن يكون معامل كل لوغاريتم 1

Rule 6 : $\log a - \log b = \log(\frac{a}{b})$

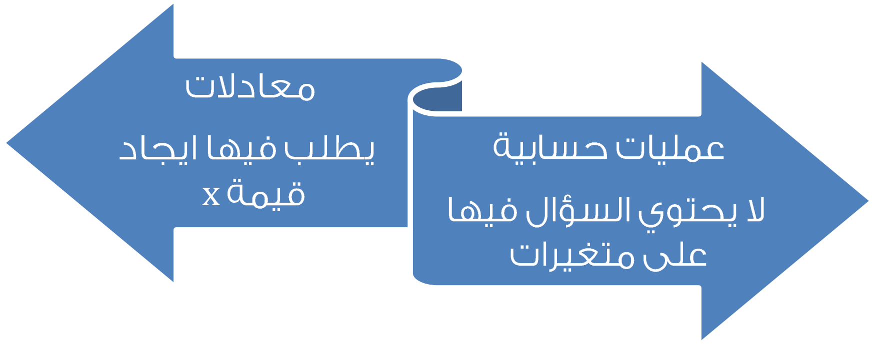
Rule 7 : $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

- تستخدم قاعدة 7 لتغيير الاساسات او توحيدها

Rule 8 : $\log_b 1 = 0$

Rule 9 : $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

يوجد نوعان من الأسئلة على الأسس واللوغاريتمات



(مسائل العمليات الحسابية)

Q1 : find value of $\log_4 32 + \log_4 50 - \log_4 25$

$$\log_4 \frac{32 \times 50}{25} = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$$

Q2 : find value of $(\log_3 16)\,(\log_5 3)(\log_4 5)$

$$\frac{ln16}{\cancel{ln3}} \times \frac{\cancel{ln3}}{\cancel{ln5}} \times \frac{\cancel{ln5}}{ln4} = \frac{ln16}{ln4} = \frac{ln4^2}{ln4} = \frac{2\cancel{ln4}}{\cancel{ln4}} = 2$$

Q3 : find value of $\log_2 \sqrt[3]{40} - \log_2 \sqrt[3]{5}$

$$\log_2 \sqrt[3]{\frac{40}{5}} = \log_2 2 = 1$$

Q4 : find value of $\log_{16} 2^6\, 4^{11}$

$$\log_{16} 2^6 + \log_{16} 4^{11} = \log_{16} 2^6 + \log_{16} 2^{22} = 6 \log_{16} 2 + 22 \log_{16} 2$$

$$= 28 \log_{16} 2 = 28 * \frac{1}{\log_2 16} = 28 * \frac{1}{\log_2 2^4} = 28 * \frac{1}{4} = 7$$

Q5 : write $(\log_3 10 + \log_9 16)$ as one logarithm to base 3

$$= \log_3 10 + \frac{\log_3 16}{\log_3 9} = \log_3 10 + \frac{\log_3 16}{2\log_3 3} = \log_3 10 + \frac{1}{2}\log_3 16$$

$$= \log_3 10 + \log_3 16^{1/2} = \log_3 40$$

Q6 : find value of $\frac{1}{\log_3 60} + \frac{1}{\log_4 60} + \frac{1}{\log_5 60}$

$$Note\ that:\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$= \log_{60} 3 + \log_{60} 4 + \log_{60} 5 = \log_{60} 60 = 1$$

(مسائل المعادلات)

1- للتخلص من اللوغاريتم فاننا نرفعه لاساسه.

$$\boldsymbol{\log_a x = b\ ;\ \cancel{a}^{\log_a x} = a^b\ ; x = a^b}$$

2- للتخلص من الاس فاننا ندخل لوغاريتم للطرفين.

$$\boldsymbol{a^x = b\ ;\ \log_a a^x = \log_a b\ ; x = \log_a b}$$

3- اذا احتوى السؤال على أكثر من لوغاريتم يجب جعلهم لوغاريتم واحد فقط عن طريق قاعدتي الجمع والطرح ثم نتخلص منه.

Q7 : solve $\log_2 3x+1=4$

$\cancel{2}^{\log_2 3x+1}=2^4$

3x+1=16 , x=5

Q8 : solve $\log_x 3x-2=2$

$x^{\log_x 3x-2}=x^2$

يهمل ال1 وذلك لانه لا يحقق المعادلة أعلاه
بالإضافة لكون الأساس يجب الا يساوي 1

$3x-2=x^2$

$x^2-3x+2=0\ ;\ (x-1)(x-2)=0\ ;\ x=1\ ,x=2$

Q9 : solve $\ln 3x-1=5$

$e^{\ln(3x-1)}=e^5\ ;3x-1=\ e^5\ ;\ 3x=e^5+1\ ;x=\dfrac{e^5+1}{3}$

Q10 : solve $\log_2 x+\log_2 x-3=\log_3 9$

$\log_2 x(x-3)=\log_3 3^2\ ;\ \log_2 x(x-3)=2$

يهمل ال–1 لان ناتج تعويضه يجعل ما داخل
اللوغاريتم سالب

$2^{\log_2 x(x-3)}=2^2$

$x^2-3x=4\ ;\ x^2-3x-4=0\ ;(x-4)(x+1)=0\ ;x=4\ ,x=-1$

Q11 : solve $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^2-7}=2$

$1/\cancel{3}^{\log_{1/3}\frac{1}{x^2-7}}=(1/3)^2$

$\dfrac{1}{x^2-7}=\dfrac{1}{9}\ ;\ x^2-7=9\ ;\ x^2=16\ ;\ x=4\ or\ x=-4$

Q12 : solve $\log_2(7x-1) - \log_2 x = 1$

$$\log_2 \frac{7x-1}{x} = 1$$

$$\cancel{2}^{\log_2 \frac{7x-1}{x}} = 2^1 \; ; \; \frac{7x-1}{x} = 2 \, , 7x - 1 = 2x \; ; \; x = \frac{1}{5}$$

Q13 : solve $\ln(x+4) - \ln(x-5) = 1$

$ln\left(\frac{x+4}{x-5}\right) = 1 \; ; \; e^{ln\left(\frac{x+4}{x-5}\right)} = e^1 \; ; \; \frac{x+4}{x-5} = e$ (ضرب تبادلي)

$$x + 4 = e(x-5) \; ; \; x + 4 = ex - 5e \; ; \; x - ex = -5e - 4$$

$$x(1-e) = -5e - 4 \; ; x = \frac{-5e-4}{1-e}$$

Q14 : solve ln(lnx) = 1

$$e^{\ln(lnx)} = e \; ; lnx = e \; ; \; e^{lnx} = e^e \; ; x = e^e$$

Q15 : solve $\log_3 x^3 + \log_3 x = 40$

$$3\log_3 x + \log_3 x = 40 \; ; \; 4\log_3 x = 40 \; ; \; \log_3 x = 10 \; ; \; 3^{\log_3 x} = 3^{10}$$

$$x = 3^{10}$$

Q16 : if $\log_x 3 = 2$ $then\ find$ $\log_3 3x$?

$$\log_3 3x = \log_3 3 + \log_3 x = 1 + \frac{1}{\log_x 3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Q17 : solve $\log_3(5 + 4\log_2(x-1)) = 2,\ x > 1$

$\log_3(5 + \log_2(x-1)^4) = 2$

$3^{\log_3(5+\log_2(x-1)^4)=3^2}$

$5 + \log_2(x-1)^4 = 9$

$\log_2(x-1)^4 = 4\ ;\ \ 4\ \log_2(x-1) = 4\ \ ;\ \ \log_2 x - 1 = 1$

$2^{\log_2 x-1} = 2\ \ ;;\ \ x - 1 = 2\ ;\ \ x = 3$

Q18 : solve $e^{2x+1} = 4$

$lne^{2x+1} = ln4\ ;\ \ 2x + 1 = ln4\ \ ;\ \ 2x = ln4 - 1\ \ ;\ \ x = \dfrac{ln4 - 1}{2}$

Q19 : solve $3^{2x+1} = 2$

$\cancel{\log_3 3}^{2x+1} = \log_3 2$

$x = \dfrac{(\log_3 2) - 1}{2}$

Q20 : solve $25^x - 2(5)^x = 3$

$((5)^2)^x - 2(5)^x - 3 = 0\ ;\ ((5)^x)^2 - 2(5)^x - 3 = 0$

$(5^x - 3)(5^x + 1) = 0$

$5^x - 3 = 0\ ;\ 5^x = 3\ \ ;\ \ x = \log_5 3$

$5^x + 1 = 0\ \ ;\ 5^x \neq -1$

الاقتران الاسي مستحيل يساوي سالب وعليه يهمل هذا الحل

Q21 : solve $e^{5x} - 4e^{3x} = 0$

$$e^{3x}(e^{2x} - 4) = 0$$

$$e^{2x} - 4 = 0 \;\; ; \;\; e^{2x} = 4 \;\; ; \;\; ln e^{2x} = ln4 \;\; ; \;\; 2x = ln4$$

$$x = \frac{ln4}{2} = \frac{1}{2} ln4 = ln\sqrt{4} = \ln 2$$

Q22 : $x = \frac{1}{2} ln9 + ln3, find\ e^{2x}$

$$2x = ln9 + 2ln3 = ln9 + ln9 = 2ln9 = ln81$$

$$e^{2x} = \cancel{e}^{ln81} = 81$$

Q23 : $16^x - 4^x - 6 = 0$

$u = 4^x$

$u^2 - u - 6 = 0$

$(u - 3)(u + 2) = 0 , u = 3 , -2$

$4^x = 3 , x = \log_4 3$

$4^x = -2$ تهمل

Q24 : find domain $f(x) = \ln(\frac{1}{16^x} - 1)$

$$\frac{1}{16^x} - 1 = 0 \; ; \; \frac{1}{16^x} = 1 \; ; 1 = 16^x \; ; x = 0$$

++++++++++++++++++++ ----------------------------------

0

$domain = (-\infty, 0)$

في هذا السؤال لا يوجد اصفار مقام كون الاقتران الاسي لا يساوي صفر

Q25 : find value of x that satisfies $\log x^{3/2} - \log \sqrt{x} = 5$

$$\log_{10}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right) = 5 \ ; \ \log_{10}\left(x^{\frac{3}{2}} * x^{\frac{-1}{2}}\right) = 5 \ ; \ \log_{10} x = 5$$

$x = 10^5$

Q26: find the domain of $f(x) = \frac{1}{\ln(7-x)}$

السؤال يحتوي على مشكلتين، المقام واللوغاريتم، اذا خط اعداد + استثناء اصفار المقام

$7 - x = 0 \ ; x = 7$

++++++++++++++++++++ ---------------------------------

7

$\ln(7 - x) = 0$

$e^{\ln(7-x)} = e^0; 7 - x = 1; x = 6$

$domain = \ (-\infty, 7)/\{6\}$

Composition تركيب الاقترانات

مبدأ هذا الدرس هو تعويض اقتران داخل اقتران آخر

$fog(x)$ $means$ $f(g(x))$ → وتعني تعويض الاقتران g داخل الاقتران f

Q1 : $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $Find\ f \circ g(x)\ and\ g \circ f(x)?$

Solution :

$f \circ g(x) = f(g(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 3$

$g \circ f(x) = g(f(x) = g(x^2 + 3) = \sqrt{x^2 + 3}$

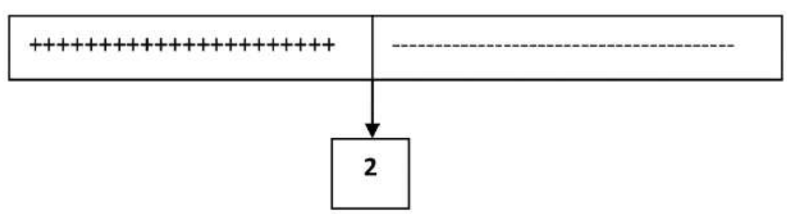
Q2 : $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{2 - x}$; $FIND\ Dom\ f \circ g(x)$?

Solution :

$Dom\ f \circ g(x) = Dom f(g(x))$

$f(g(x)) = f(\sqrt{2 - x}) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$

$Dom\ (\sqrt[4]{2 - x})$; $2 - x = 0$; $x = 2$



$Dom :\ (-\infty, 2]$

Q3 : $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{1}{x-2}$; $Find\ Dom\ f \circ g(x)?$

$Dom\ f\big(g(x)\big) = Dom\ f\big(g(x)\big)$

$f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x-2}}$

$Dom\ f\big(g(x)\big) = R - \{2\}$

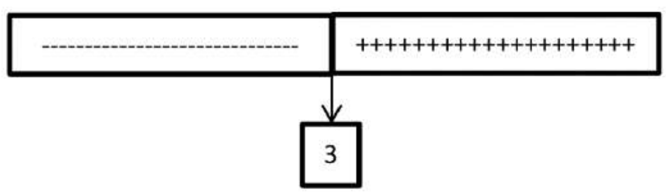
Q4 : $f(x) = \sqrt{x^2+3}$; $g(x) = \sqrt{x-3}$; $Find\ Dom\ f \circ g(x)$?

Solution :

$Dom\ f\big(g(x)\big) = Dom\ f\big(g(x)\big)$

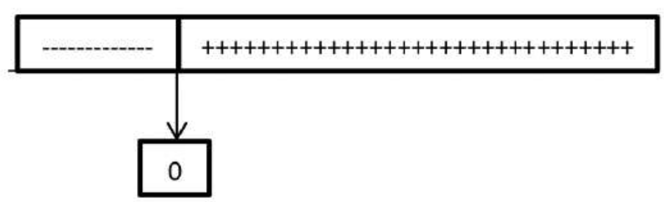
$f(g(x) = f(\sqrt{x-3}\,) = \sqrt{(\sqrt{x-3}\,)^2 + 3}$

$x - 3 = 0$; $x = 3$



$(\sqrt{x-3}\,)^2 + 3 = 0$; $(\sqrt{x-3}\,)^2 = -3$

$(\sqrt{x-3}\,)^2 = -3$, $x - 3 = -3$; $x = 0$ بالتعويض



$Domain = [3, \infty)$

في التركيب نتجنب دائما حذف التربيع مع الجذر او اختصارات الاقترانات بشكل عام

Q5 : $If\ f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4\ ,\ x \le 1 \\ x - 1,\ \ 1 < x \le 4 \\ x + 1,\ x > 4 \end{cases}$

$Then\ f \circ f(1)?$

Solution :

$f(f(1) = f(2(1)^2 + 4) = f(6) = 6 + 1 = 7$

Q6 $f(x) = \sqrt{2 - x}\ ,\ \ g(x) = \sqrt{x}, find\ Dfog$

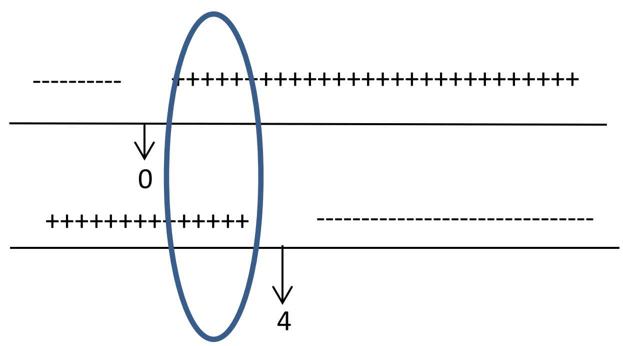
نلاحظ أن الاقتران الناتج مكون من جذرين، وعليه نحتاج خطي أعداد

$fog = f(g) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$

$for\ \sqrt{x}, x = 0$

$\sqrt{2 - \sqrt{x}} = 0\ ; x = 4$

$D = \ [0,4]$



Q7 :$If\ h(x) = \ 5^x\ and\ the\ domain\ of\ f(x) = [3,8]\ , then\ the\ domain$

$of\ f \circ h(x)$?

Solution :

$Domain\ f\big(h(x)\big) = \ Dom\ f\big(h(x)\big)$

$f\big(h(x)\big) = \ f(\ 5^x)$

$3 \le 5^x \le 8\ \ ;\ \log_5 3 \le \log_5 5^x \le \log_5 8$

$\log_5 3 \le x \le \log_5 8\ \ \ ; Domain\ :\ [\log_5 3\ , \log_5 8]$

Q8 : $If\ f(x) = e^{2x}\ \ and\ g(x) = lnx\ \ ,then\ f \circ g(3)\ ?$

Solution :

$f\big(g(3)\big) = f(ln3) = \ e^{2ln3} = e^{ln3^2} = e^{ln9} = 9$

Q9 : $Find\ f \circ g(x)\ ,if\ f(x) = x^2 - 1\ \ ; g(x) = 2x + 1\ \ ?$

Solution :

$f\big(g(x)\big) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 1 = 4x^2 + 4x + 1 - 1 = 4x^2 + 4x.$

Q10: $If\ f(x) = 3x - 5\ and\ f \circ g(x) = 12x^2 - 6x + 13\ ,then\ g(0)?$

Solution :

$f\big(g(0)\big) = 3g(0) - 5 = 12(0)^2 - 6(0) + 13\ \ ; 3g(0) - 5 = 13$

$3g(0) = 18\ \ ;\ \ g(0) = 6$

Q11 : $If\ f(x) = (x - 7)^2\ and\ g(x) = 4^{\sqrt{x}}\ \ ,then\ g \circ f(x)\ ?$

$g\big(f(x)\big) = g((x - 7)^2) = 4^{\sqrt{(x-7)^2}} = 4^{|x-7|}$

Q12 : $If\ f(x) = sinx\ ,\ \ g(x) = x^2 + 3\ ,Find\ g \circ f(\ \pi\ )?$

Solution :

$g\big(f(\pi)\big) = g(sin\pi) = g(0) = \ 0^2 + 3 = 3$

Decomposition فك التركيب

يعطينا اقتران مكون من اقترانين او أكثر ويطلب منا فك تركيب الاقترانات

Q1 : $h(x) = (x-3)^2$, $h(x) = fog(x), find\ f(x), g(x)$

$f(x) = \ x^2$

$g(x) = x - 3$

Q2 : $h(x) = sin^3 x$, $h(x) = fog(x), find\ f(x), g(x)$

$f(x) = \ x^3$

$g(x) = sinx$

Q3 : $h(x) = sinx^3$, $h(x) = fog(x), find\ f(x), g(x)$

$f(x) = \ sinx$

$g(x) = x^3$

Q4 : $H(x) = \frac{1}{\sqrt{x+sinx}}$, $H(x) = fogoh(x), find\ f(x), g(x), h(x)$

$f(x) = \ \dfrac{1}{x}$

$g(x) = \sqrt{x}$

$h(x) = x + sinx$

Even and Odd

$$common\ even\ functions:\ x^2, x^4, |x|, cosx, any\ constant\ function$$

$$common\ odd\ functions:\ x, x^3, x^5, sinx\ , tanx$$

لتحديد اذا كان الاقتران زوجي أو فردي نعوض في الاقتران x و x- ثم نقارن بين الاجابتين

- يمكن تعويض عدد وسالبه بدلاً من تعويض x و x-
- Any even functions symmetry about y-axis
- Any odd functions symmetry about orign
- $sinx^2, even$
- $tan|x|, even$

- بعض المسائل يمكن حلها باستخدام العلاقات التالية بدلاً من التعويض، وذلك في حال كانت جميع الاقترانات الموجودة في السؤال معروفة even or odd

$$even \pm even = even$$
$$odd \pm odd = odd$$
$$even \pm odd = neither$$
$$even \times even = even$$
$$even \times odd = odd$$
$$odd \times odd = even$$

$Q1 : f(x) = x^3 + x$, $determine\ whether\ f(x)\ is\ even, odd\ or\ neither?$

odd + odd = odd

وبالامكان أيضا حل السؤال بطريقة التعويض

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$
$$f(-1) = -1 - 1 = -2$$

بما أن ناتج التعويض نفس العدد لكن مضروب بسالب اذا *odd*

$Q2 : f(x) = x^3 + 1$, $determine\ whether\ f(x)\ is\ even, odd\ or\ neither?$

odd + even = neither

باستخدام طريقة التعويض

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$
$$f(-1) = -1 + 1 = 0$$

بما أنه لا توجد علاقة بين الناتجين اذا *neither*

$Q3: \ f(x) = x^2 + 1\ , determine\ whether\ f(x)\ is\ even, odd\ or\ neither?$

even + even = even

$Q4: f(x) = x|x|\ , determine\ whether\ f(x)\ is\ even, odd\ or\ neither?$

odd x even = odd

وبالامكان أيضا حل السؤال بطريقة التعويض

$$f(1) = 1x1 = 1$$

$$f(-1) = (-1)x(1) = -1$$

بما أن ناتج التعويض نفس العدد لكن مضروب بسالب اذا *odd*

$Q5: \ f(x) = |x|sinx\ , determine\ whether\ f(x)\ is\ even, odd\ or\ neither?$

odd x odd = even

$Q6: f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + |x| + 3}, determine\ whether\ f(x)\ is\ even, odd\ or\ neither?$

$$\frac{odd}{even + even + even} = \frac{odd}{even} = odd$$

$Q7: f(x) = |x - 1| - |x + 1|$

هذا السؤال لا يمكن استخدام الا طريقة التعويض وذلك لكونها لاقترانات غير معلومة

$$f(1) = 0 - 2 = -2$$

$$f(-1) = 2 - 0 = 2$$

بما أن ناتج التعويض نفس العدد لكن مضروب بسالب اذا *odd*

$Q8: f(x) = \frac{sinx^2}{x^3 - 2x}$

$$\frac{even}{odd - odd} = \frac{even}{odd} = odd$$

$Q9: \ f(x) = xtanx^2$, is symmetry about ?

odd x even = odd (sym about origin)

Q10: Which of the following is an even function ?

a) $x^2 + 3x$

b) $2 - 3x$

c) $1 + 2cosx$

d) $\frac{x^3 - x}{1 + x^2}$

Q11: Which of the following is an even function :

a) $x^2 + 4$

b) $2x - 1$

c) $\frac{x^5 - x}{5 + 3x^2}$

d) $1 + sinx$

Q12 : If $f(x) = x^3 + x + a$, an odd function , Find (a) ?

a) 2

b) 4

c) 0

d) 1

$f(-x) = (-x)^3 - x + a = -x^3 - x + a$

$-f(x) = -x^3 - x - a$

$f(-x) = -f(x)$

$-x^3 - x + a = -x^3 - x - a$

$-x^3 - x + a + x^3 + -x + a = 0$; $2a = 0$; $a = 0$

$Q13 : if\ f(x) is\ even, g(x) is\ odd, f(3) = -4, g(1) = 3, find\ fog(-1)?$

$f(x) even\ means\ f(-3) = f(3) = -4$

$g(x) even\ means g(-1) = -g(1) = -3$

$fog(-1) = f\big(g(-1)\big) = f(-3) = -4$

$Q14 :\ f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$

$f(3) = \ln\ 5$

$f(-3) = ln\left(\frac{-1}{-5}\right) = ln\left(\frac{1}{5}\right) = ln5^{-1} = -ln5$

بما أن ناتج التعويض نفس العدد لكن مضروب بسالب اذا odd

$Q15 :\ f(x) = e^{2+x} - e^{2-x}$

$f(1) = e^3 - e^1$

$f(-1) = e^1 - e^3 = -(e^3 - e^1)$

بما أن ناتج التعويض نفس العدد لكن مضروب بسالب اذا odd

New function from old

سنتحدث في هذا الدرس عن أنواع التغييرات الممكن عملها على الاقترانات وهي ثلاثة أنواع

في جميع الأنواع سنلاحظ أن التغيرات ستقسم أيضا الى تغيرات داخلية تؤثر على المجال (x-axis) وتغيرات خارجية تؤثر على المدى (y-axis)

1- Shifting الازاحة

تكون الازاحة للاقترانات من خلال عملية الجمع والطرح

Vertical and Horizontal Shifts Suppose $c > 0$. To obtain the graph of

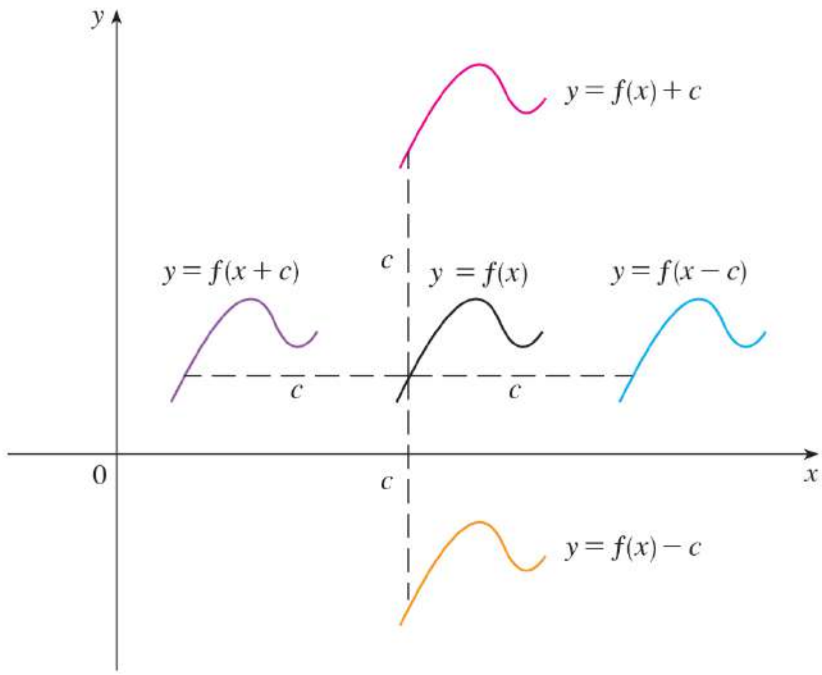
$y = f(x) + c$, shift the graph of $y = f(x)$ a distance c units upward

$y = f(x) - c$, shift the graph of $y = f(x)$ a distance c units downward

$y = f(x - c)$, shift the graph of $y = f(x)$ a distance c units to the right

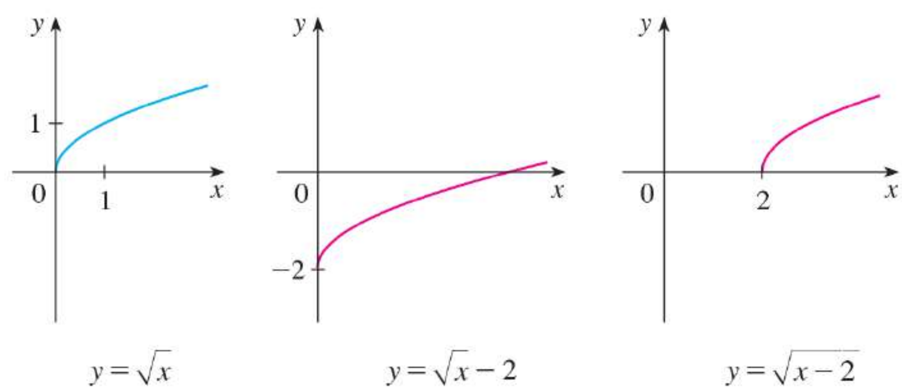
$y = f(x + c)$, shift the graph of $y = f(x)$ a distance c units to the left

نلاحظ أن عملية الجمع خارج الاقتران تحرك الاقتران للاعلى والاسفل (*y-axis*) بينما عملية الجمع والطرح داخل القوس الخاص بـX تحركه يمينا ويساراً (*x-axis*)



Q1

Given the graph of $y = \sqrt{x}$, use transformations to graph $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$



$Q2:\ f(x) = x^2 + x$, *has translated* 2 *units right then* 3 *units up, write the new function.*

$step\ 1:\ f(x) = (x-2)^2 + (x-2)$
$step\ 2:\ f(x) = (x-2)^2 + (x-2) + 3$

$Q3: \ f(x) = x^2 + 4x + 5, what\ shifts\ happened\ to\ f(x) = x^2$

- هنا نحتاج لعمل اكمال مربع لمعرفة التغيرات التي حصلت على الاقتران الأصلي

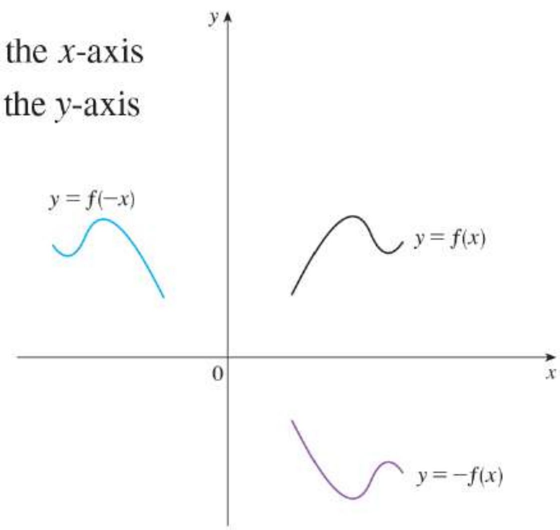
خطوات أكمال المربع :

1. ترتيب المعادلة
2. يجب أن يكون معامل x^2 يساوي 1
3. نجمع ثم نطرح $\left(\frac{x\ \text{معامل}}{2}\right)^2$ ثم نكتب المعادلة على شكل $(x \pm a)^2 \pm b$

$f(x) = x^2 + 4x + 4 - 4 + 5$
$f(x) = (x+2)^2 + 1$
$so\ shift\ up\ 1\ unit\ and\ left\ two\ units$

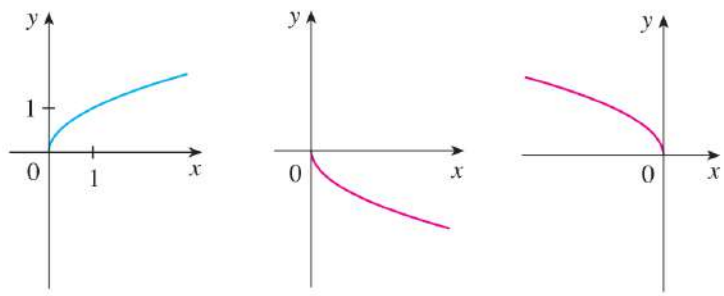
2- Reflection

$y = -f(x)$, reflect the graph of $y = f(x)$ about the x-axis
$y = f(-x)$, reflect the graph of $y = f(x)$ about the y-axis



$Q4$

Given the graph of $y = \sqrt{x}$, use transformations to graph $y = -\sqrt{x}$ and $y = \sqrt{-x}$.

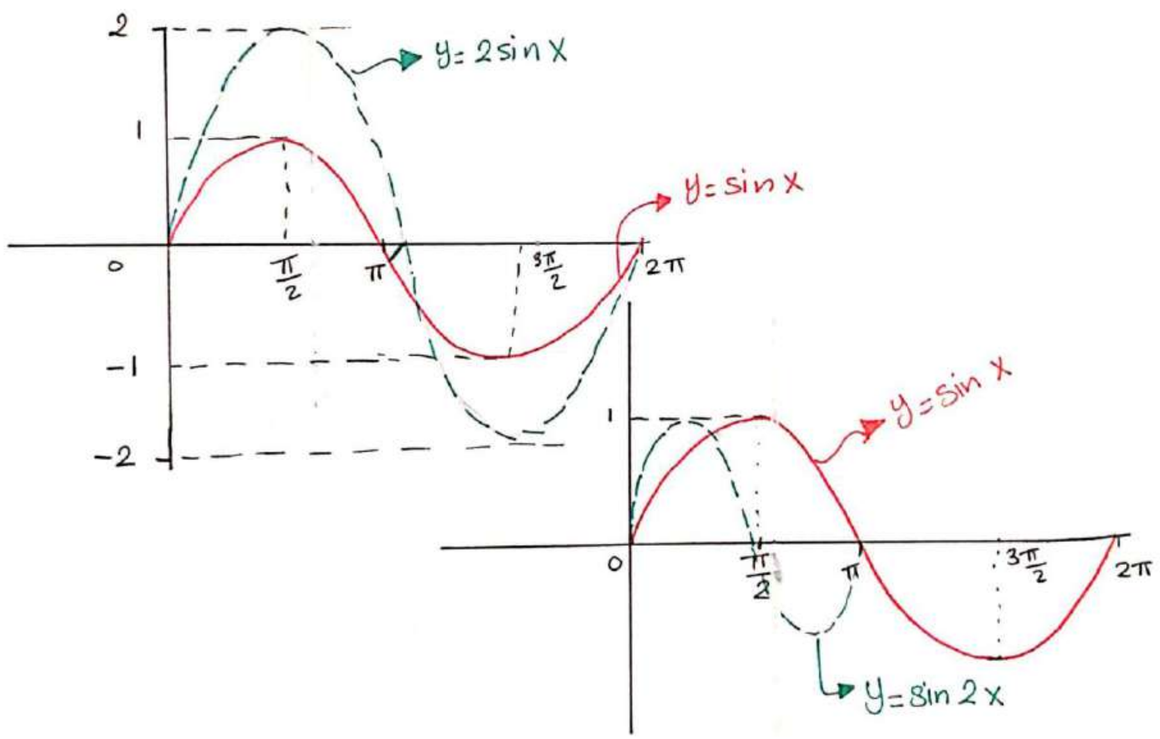


$y=\sqrt{x}$ $\qquad$ $y=-\sqrt{x}$ $\qquad$ $y=\sqrt{-x}$

Stretching And Shrinking:

outside
- $a f(x)$: stretch Vertically
- $\frac{1}{a} f(x)$: shrink Vertically.

inside
- $f(xa)$: Shrink Horizontally
- $f(\frac{x}{a})$: stretch Vertically.



▶ Advanced Problems :

$f(x) = |2x+1|$, write the new function after:

a- Shift up one unit.

→ solution: $f(x) = |2x+1| + 1$

b- then Shift right 3 units:

→ solution: $f(x) = |2(x-3)+1| + 1$

c- then reflect it about y-axis:

→ solution: $f(x) = |2(-x-3)+1| + 1$

d- then stretch vertically 5 times:

→ solution: $f(x) = 5(|2(-x-3)+1| + 1)$

Sketch $f(x) = \sqrt{1-x}$

→ Solution:

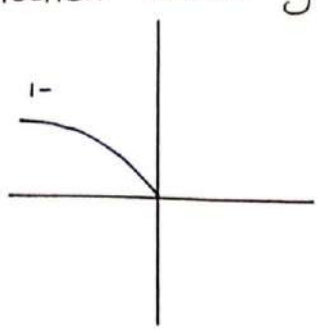
* $f(x) = \sqrt{-1(-1+x)}$

* لمعرفة التغيرات الداخلية يجب أن يكون معامل $x = 1$.

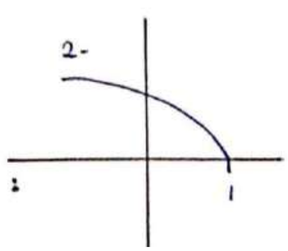
→ changes that have been made are:

* الأولوية للتغيرات هي للضرب والقسمة ، ثم الجمع والطرح .

1- reflection about y-axis



2- Shift right, by 1 unit:



Sketch $f(x) = -3x^2 + 6x + 3$

→ Solution:

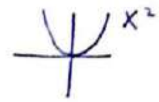
(إكمال مربع) .

$$f(x) = -3(x^2 - 2x - 1)$$

$$= -3(x^2 - 2x \underbrace{+1 -1}_{} -1)$$

$$= -3((x-1)^2 - 2) \rightarrow = -3(x-1)^2 + 6.$$

Original Function ? → $y = x^2$

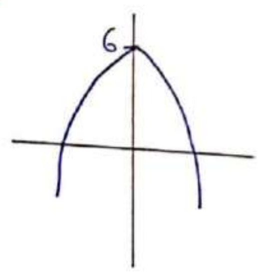


*Changes made ? → 1- reflection about x-axis:-

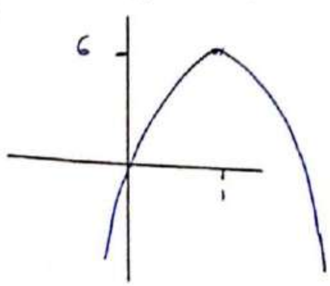
2- Stretch vertically X3:

→ this sketch haven't changed because the range is $0 \rightarrow -\infty$!!

3- shift up by 6:



4- Shift right by 1:



#

- للاستفسار :
0795476962

$$If\ f(x) = x^2 - 4x + 7\ is\ obtained\ from\ g(x) = x^2 + 1\ What\ happened\ ?$$

افضل طريقة لحل السؤال هي من خلال رأس القطع

$x = \dfrac{-b}{2a}$

$b : The\ factor\ of\ (x)$ (باشارته) .

a : The factor of x^2 (باشارته) .

$Old\ function:$

$g(x) = x^2 + 1$

$x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{2 * 1} = 0 \quad ; \quad g(0) = 0 + 1 = 1$

$(x, y): (0,1)$

$New\ function:$

$f(x) = x^2 - 4x + 7$

$x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{- - 4}{2 * 1} = 2\ ;\ f(2) = 2^2 - 4(2) + 7 = 4 - 8 + 7 = -4 + 7 = 3$

$(x, y) = (2,3)$

$So\ , (\ New - old\ ) = \big(\ (3 - 1), (2 - 0)\big) = (2,2)$

$So\ (2)\ units\ to\ right.$

$Up\ (2) units.$

Inverse Functions

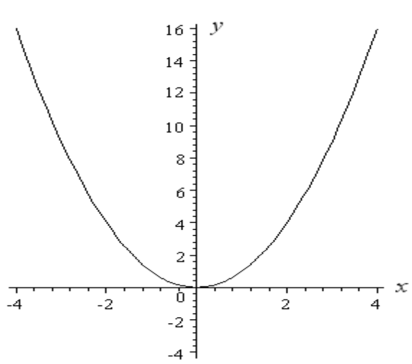
- Inverse
  - Other functions
    - $f^{-1}(a)$ حيث يطلب ايجاد قيمة الانفرس لعدد
    - $f^{-1}(x)$ حيث يطلب ايجاد قيمة الانفرس لاقتران معين
  - Trigonometric functions
    - $\sin^{-1} \sin$, $\cos^{-1} \cos$, $\tan^{-1} \tan$
    - $\sec \sin^{-1} x$, $\sin \cos^{-1} x$, $\cos \tan^{-1} x$

Rule $\quad$ $if\ f^{-1}(a) = b\ , then\ f(b) = a$

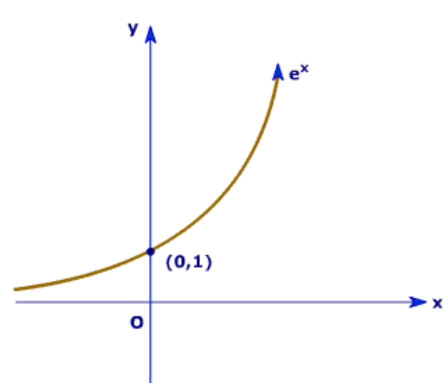
One to one Functions

حتى نتمكن من ايجاد قيمة الانفرس لاي اقتران فانه يجب أن يكون 1–1، حيث نتمكن من تحديد اذا ما كان الاقتران 1–1 عن طريق اختبار الخط الافقي horizontal line test

اذا قطع الخط الافقي الرسمة في نقطتين لا يعتبر الاقتران 1–1



Not 1-1



1-1

ملاحظة : أي اقتران يحتوي على $\sin x, \cos x, x^2, |x|$ لا يعتبر $1-1$ الا اذا جاء معه فترة تعيده الى $1-1$

$Q1: which\ of\ the\ following\ functions\ is\ 1-1$

$a. f(x) = x^2 - 6x + 3$

$b. f(x) = e^{x^2}$

$c. f(x) = 3x + 1$

$d. f(x) = cosx + 3$

$e. f(x) = |x + 5| - 3$

ans is c

Case 1 : $f^{-1}(a)$

$Q1: f(x) = x^2 - 7x + 4, x > 2, find\ f^{-1}(-2)$

معنى هذا السؤال، ما هي قيمة x التي ناتج تعويضها داخل الاقتران تساوي 2–، ويحل السؤال اما بتعويض 2– مكان f(x) أو بالتجريب

$-2 = x^2 - 7x + 4;\ x^2 - 7x + 6 = 0$
$(x - 6)(x - 1) = 0$
$x = 6, x = 1$

تهمل

$Q2: f(x) = 3e^x - 2e^{-x} + 1, find\ f^{-1}(2)$

هذا السؤال الافضل حله بالتجريب ، نبحث في الخيارات عن عدد ناتج تعويضه 2

ans is x=0

$Q3: f(x) = 3e^{1-x} - 2sin\pi x + x, find\ f^{-1}(6)$

ans is x=1

$Q4: let\ \ f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3x+1}, which\ of\ the\ following\ has\ no\ solution?$

No solution تعني مشكلة، وهنا المشكلة هي صفر المقام

$$3x + 1 = 0$$
$$x = \frac{-1}{3}$$

$Q5: let\ \ f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}, f^{-1}(x) = 3, find\ the\ value\ of\ x\ ?$

$f^{-1}(x) = 3\ so$

$f(3) = x$

$f(3) = \dfrac{3^2}{3^2+1} = \dfrac{9}{10} = x$

Case 2 : $f^{-1}(x)$

لايجاد $f^{-1}(x)$ لاي اقتران نتبع الخطوات التالية :

1. نستبدل كل y بـx وكل x بـy
2. نجعل y موضع القانون من جديد

$Q1: let\ \ f(x) = x^3 + 1, find\ \ f^{-1}(x)$

$y = x^3 + 1$

$x = y^3 + 1$

$y^3 = x - 1$

$y = \sqrt[3]{x-1} = f^{-1}(x)$

$Q2 : let\ \ f(x) = \dfrac{x+5}{x+1}, find\ \ f^{-1}(x)$

$x = \dfrac{y+5}{y+1}$

$xy + x = y + 5$

$xy - y = 5 - x$

$y(x-1) = 5 - x$

$y = \dfrac{5-x}{x-1} = f^{-1}(x)$

$Q3 : let\ \ f(x) = \dfrac{3^x}{3^x+1}, find\ \ f^{-1}(x)$

$x = \dfrac{3^y}{3^y+1}$

$x3^y + x = 3^y$

$3^y - x3^y = x$

$3^y(1-x) = x$

$3^y = \dfrac{x}{1-x}$

$y = \log_3(\dfrac{x}{1-x}) = f^{-1}(x)$

$Q4 : let\ \ f(x) = \dfrac{e^x}{2e^x+1}, find\ \ f^{-1}(x)$

$x = \dfrac{e^y}{2e^y+1}$

$2xe^y + x = e^y$

$e^y - 2xe^y = x$

$e^y(1-2x) = x$

$e^y = \dfrac{x}{1-2x}$

$e^y = \ln\left(\dfrac{x}{1-2x}\right) = f^{-1}(x)$

$Q5 : let\ \ f(x) = \log_4(x+2)\ , find\ \ f^{-1}(x)$

$x = \log_4(y+2)$
$4^x = 4^{\log_4(y+2)} = y+2$
$y = 4^x - 2 = f^{-1}(x)$

$Q6 : let\ \ f(x) = x^2 + 6x + 5\ , x > 0, find\ \ f^{-1}(x)$

$x = y^2 + 6y + 5, we\ need\ to\ comlete\ the\ square$
$x = \ y^2 + 6y + 9 - 9 + 5$
$x = (y+3)^2 - 4$
$x + 4 = (y+3)^2$
$y - 3 = \sqrt{x+4}$
$y = \sqrt{x+4} + 3 = f^{-1}(x)$

$Rule:\ Df^{-1}(x) = Rf(x), and\ Rf^{-1}(x) = Df(x)$

أهم استخدام لهذه القاعدة هو لايجاد ***range*** الاقترانات، حيث انه عند طلب ***range*** أي اقتران فانه من الممكن ايجاد مجال الانفرس بدلا منه، حيث ان المجال اسهل دائما

$Q7 : find\ range\ of\ f(x) = \dfrac{x+5}{x+1}$
$Rf(x) = Df^{-1}(x)$
$x = \dfrac{y+5}{y+1}$
$y = \dfrac{5-x}{x-1} = f^{-1}(x)$
$Df^{-1}(x) = \mathbb{R} - \{1\} = Rf$

homework

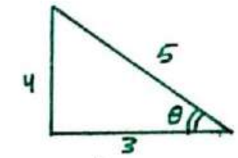
$Q8 : let\ \ f(x) = \ln(x-1) - \ln(x+1)\,, find\ \ f^{-1}(x)$

$Q9 : let\ \ f(x) = 4^{\sqrt{4-x}}, find\ \ f^{-1}(x)$

$Q10 : let\ \ f(x) = x^3 + 2x + 3\ find\ x\ such\ that\ f^{-1}(x) = 1$

$Q11 : let\ \ f(x) = \dfrac{1}{1-4e^x}, find\ \ range\ f(x)$

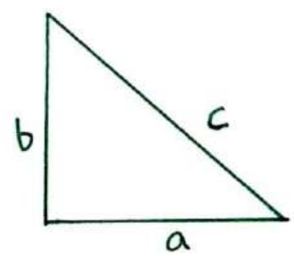
Trigonometric functions



$\sin x = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{5}{4}$

$\cos x = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{5}{3}$

$\tan x = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{3}{4}$



$a^2 + b^2 = c^2$ (فيثاغورث

	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Inverse for Trigonometric functions:

$\sin^{-}\sin x$	$\sin \cos^{-} x$
$\cos^{-}\cos x$	$\sin \tan^{-} x$
$\tan^{-}\tan x$	$\sec \sin^{-} x$

Notes:

- $\arcsin x$ means $\rightarrow \sin^{-} x$.
- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$.
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$.

function	Domain	Rule.
• $\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\pi - \theta$
• $\tan x$	$(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\theta - \pi$
• $\cos x$	$[0, \pi]$	$2\pi - \theta$.

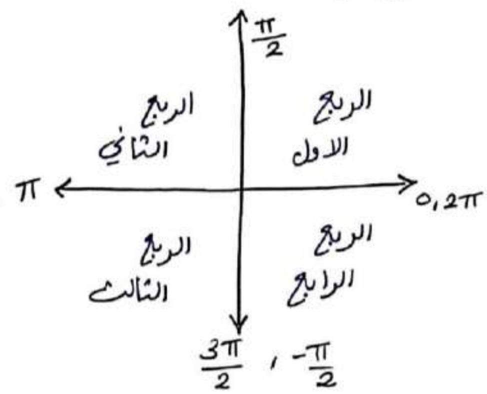
Good Luck

← لإيجاد قيمة $\sin^{-1}\sin x$, $\cos^{-1}\cos x$, $\tan^{-1}\tan x$ ؛ نتبع الخطوات التالية :

1- اذا كانت الزاوية أكبر من 2π ؛ نطرح منها 2π .

(اذا كانت أقل منها ننتقل إلى الخطوة التالية مباشرة") .

2- نحدد الزاوية في أي ربع بحيث :-



3- إذا كانت الزاوية تنتمي لمجال الاقتران يكون الجواب الزاوية نفسها

← إذا لم تكن الزاوية داخل المجال نستخدم القاعدة الخاصة بكل اقتران حسب الجدول السابق .

➜ Problems:

1- find the Value of $\sin^{-1}\sin \frac{5\pi}{4}$

step 1 $\frac{5\pi}{4} < 2\pi$

step 2 $\frac{5\pi}{4} = \frac{5 * 180}{4} = 225$ (الزاوية في الربع الثالث)

step 3 $D_{\sin}$ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. → عاأنه الزاوية ليست في المجال نستخدم قاعدة الـ $\sin$ $(\pi - \theta)$

$\Rightarrow \sin^{-1}\sin \frac{5\pi}{4} = \pi - \frac{5\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$.

2- $\tan^{-1}\tan \frac{5\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6} < 2\pi$ ؛ $\frac{5\pi}{6} = \frac{5 * 180}{6} = 150$ ← ليست في المجال لذا نستخدم قاعدة الـ $\tan$

$\rightarrow \tan^{-1}\tan \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - \pi = \frac{-\pi}{6}$.

2- Find the value of $\cos^{-}\cos\frac{5\pi}{4}$ → بما ان الزاوية ليست في المجال ؛ انا "نستخدم" قاعدة ل cos :

$$\cos^{-}\cos\frac{5\pi}{4} = 2\pi - \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

step 1 $\frac{5\pi}{4} < 2\pi$

step 2 $\frac{5\pi}{4} = \frac{5*180}{4} = 225$

step 3 $D_{\cos} = [0, \pi]$.
(الربع الأول والثاني).

3- $\sin^{-}\sin\frac{\pi}{6}$

step 1 $\frac{\pi}{6} < 2\pi$

step 2 $\frac{\pi}{6} \rightarrow$ الربع الأول

$\sin^{-1}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$. (لأن الزاوية داخل المجال الخاص بال sin.

4- $\sin^{-}\sin\frac{5\pi}{4}$

$\frac{5\pi}{4} > 2\pi$ (نطرح 2π).

$\frac{5\pi}{2} - 2\pi = \frac{\pi}{2}$ → تصبح هذه الزاوية زاوية السؤال !

$\sin^{-}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ → لأنه الزاوية داخل مجال ال sin.

5- $\tan^{-1}\tan\frac{23\pi}{7}$

$\frac{23\pi}{7} > 2\pi$, $\frac{23\pi}{7} - 2\pi = \frac{9\pi}{7}$

$\frac{9\pi}{7} = \frac{9*180}{7} = \sim 230$

$\tan^{-}\tan\frac{9\pi}{7} = \frac{9\pi}{7} - \pi = \frac{2\pi}{7}$.

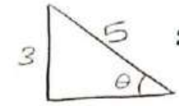
للاستفسار :-
0795476962

► How to find value of $\sin\cos^{-}x$, $\cos\tan^{-}x$, ...

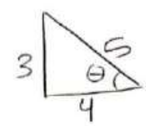
Rule :
$\sin x = y$
$\sin^{-} y = x$

1- find value of $\underbrace{\cos\sin^{-}\frac{-3}{5}}_{\theta}$.

step 1: $\theta = \sin^{-}\frac{-3}{5}$

$\sin\theta = \frac{3}{5}$ $\left(\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}\right)$ 

: step 2

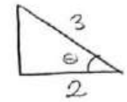
step 3: (فيثاغورس) 

⇒ نجيب الضلع الثالث

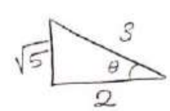
step 4: $\cos\sin^{-}\frac{3}{5} = \cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5}$.

2- find value of $\sin\sec\frac{-3}{2}$

step 1: $\theta = \sec\frac{-3}{2}$

$\frac{3}{2} = \sec\theta \rightarrow \frac{2}{3} = \cos\theta$ 

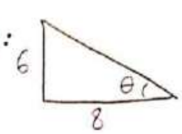
: step 2

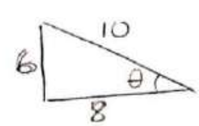
step 3: 

step 4: $\sin\sec^{-}\frac{3}{2} = \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

3- find the value of $\sin 2\tan^{-}\frac{6}{8}$

step 1: $\theta = \tan^{-}\frac{6}{8} \rightarrow \frac{6}{8} = \tan\theta$.

step 2: 

step 3: 

- **Hint :**
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.

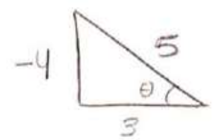
step 4: $\sin 2\tan^{-}\frac{6}{8} = \sin 2\theta$

$= 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{8}{10}\right)$.

4- find value of $\cos\tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-4}{3}$$

$$\frac{-4}{3} = \tan\theta \, .$$



$$\cos\tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$$

$$= \cos\theta = \frac{3}{5} \, .$$

5- find value of $\sin\left(\underset{a.}{\cos^{-1}\frac{3}{5}} + \underset{b.}{\cos^{-1}\frac{7}{9}}\right)$

→ Solution:-

$$\sin(a+b) = \sin a * \cos b + \cos a * \sin b$$

$$= \sin\cos^{-1}\frac{3}{5} * \cos\cos^{-1}\frac{7}{9} + \cos\cos^{-1}\frac{3}{5} * \sin\cos^{-1}\frac{7}{9}$$

$$= \sin\cos^{-1}\frac{3}{5} * \left(\frac{7}{9}\right) + \left(\frac{3}{5}\right) * \sin\cos^{-1}\frac{7}{9} \, .$$

⋮

للاستفسار:-
0795476962

homework

$$Q1 : find\ \ cos^{-1} cos\frac{20\pi}{7}$$

$$Q2 : find\ \ sin^{-1} sin\frac{23\pi}{8}$$

$$Q3 : find\ \ tan^{-1} tan\frac{15\pi}{4}$$

$$Q4 : find\ \ cos\ (2sin^{-1}\frac{4}{5})$$

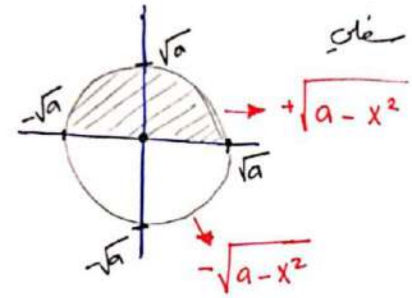
$f(x) = \sqrt{a - x^2}$:

(رقم عادي)

* هذا الاقتران هو عبارة عن اقتران نصف دائرة مركزها (0,0) ، ونصف قطرها $\sqrt{a}$:

← اذا كان الجذر موجب فهو نصف دائرة علوي

← اذا كان الجذر سالب فهو نصف دائرة سفلي



example:

find domain and range for:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

- Solution:

this is a half circle (Top Part),
with center (0,0), and radius = 2.

Domain: $[-2, 2]$

Range : $[0, 2]$

Range

يوجد طريقتين لايجاد الrange

من خلال ايجاد مجال الانفرس
اذا كان اقتران غير معلوم الرينج

من خلال اقتران معلوم الرينج وعليه تعديلات خارجية

$\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, sinx, cosx, a^x, \sqrt{a-x^2}$

$$R\, sin\, x = [-1{,}1]$$

$$R\, sin^{-1} x = \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$R\, cos\, x = [-1{,}1]$$

$$R\, cos^{-1} x = [0, \pi]$$

$$R\, sin^2 x = [0{,}1]$$

$$Ra^x = (0, \infty)$$

$$R\, cos^2 x = [0{,}1]$$

$$R\sqrt{a-x^2} = [0, \sqrt{a}]$$

$$R\, |sinx| = [0{,}1]$$

$$R(-\sqrt{a-x^2}) = [-\sqrt{a}, 0]$$

$$Rx^2 = [0, \infty)$$

$$R\sqrt{x} = [0, \infty)$$

$Q1 : find\ Range\ f(x) = 2\,sin(3x - 2) - 1$

$-1 \leq \sin(3x - 2) \leq 1$

ما داخل القوس لا يؤثر على الرينج وانما على المجال فقط

$-2 \leq 2\sin(3x - 2) \leq 2$

$-3 \leq 2\sin(3x - 2) - 1 \leq 1$

$so\ range\ \ [-3,1]$

$Q2 : find\ Range\ f(x) = 2\,cos^2(2x) + 1$

$0 \leq cos^2(2x) \leq 1$

$0 \leq 2cos^2(2x) \leq 2$

$1 \leq 2cos^2(2x) \leq 3$

$so\ range\ \ [1,3]$

$$Q3 : find\ Range\ f(x) = \frac{3}{2 + sinx}$$

$-1 \leq sinx \leq 1$

$1 \leq 2 + sinx \leq 3$

$\frac{1}{3} \leq \frac{2 + sinx}{3} \leq \frac{3}{3}$

تقلب اشارة المتباينة عند قلبها او ضربها بسالب

$3 \geq \frac{3}{2 + sinx} \geq 1$

$so\ range\ \ [1,3]$

$Q4 : find\ Range\ f(x) = 3e^x + 10$

$0 < e^x < \infty$

$0 < 3e^x < \infty$

$10 < 3e^x + 10 < \infty$

$so\ range\ \ (10, \infty)$

$Q5 : find\ Range\ f(x) = \sqrt{4 - x^2} + 3$

$0 \leq \sqrt{4 - x^2} \leq 2$

$3 \leq 3 + \sqrt{4 - x^2} \leq 5$

$so\ range\ \ [3,5]$

$Q6 :\ find\ Range\ f(x) = 2\sin^{-1}(x - 1) - 1$

$Q7 :\ find\ domain\ f(x) = 2\sin^{-1}(x - 1) - 1$

$Q8 : If\ range\ f(x) = [-1,5], find\ range\ g(x) = 3 - 2f(x - 3)$

$Q9 : find\ Range\ f(x) = 2|sinx| + 3$

$0 \leq |sinx| \leq 1$
$0 \leq 2|sinx| \leq 2$
$3 \leq 2|sinx| + 3 \leq 5$
$so\ range\ \ [3,5]$

$Q10 :\ find\ range\ of\ f(x) = \dfrac{x+5}{x+1}$
$Rf(x) = Df^{-1}(x)$
$x = \dfrac{y+5}{y+1}$
$y = \dfrac{5-x}{x-1} = f^{-1}(x)$
$Df^{-1}(x) = \mathbb{R} - \ \{1\} = Rf$

$Q11 : find\ range\ f(x) = x^2 + 4x - 13$

$f(x) = x^2 + 4x + 4 - 4 - 13$
$f(x) = (x-2)^2 - 17$
$0 \leq (x-2)^2 < \infty$
$-17 \leq (x-2)^2 < \infty$
$so\ range\ f(x) = [-17, \infty)$

CH 2

Limits

$\lim_{x \to a} f(x)$ $\qquad$ $\lim_{x \to \infty} f(x)$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to 2} x+2 = 4$$

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

- $\to \frac{\text{num}}{\text{num}} \Rightarrow$ Final ans..
- $\to \frac{\text{num}}{0} = \pm\infty \Rightarrow$ Final ans..
- $\to \frac{0}{0} \Rightarrow$ not Final ans..

Q_1 $\lim_{x \to 5} \frac{x+2}{x-3} = \frac{7}{2}$

$\frac{0}{0}$ Q_2 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = 4$

$\frac{0}{0}$ Q_3 $\lim_{x \to 1} \frac{(x^3-1)}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{3}{-1} = -3$

$\frac{0}{0}$ Q_4 $\lim_{x \to 1} \frac{(x^2-1)^{10}}{(x^2-2x+1)^5} = \lim_{x \to 1} \frac{((x-1)(x+1))^{10}}{((x-1)(x-1))^5}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^{10}(x+1)^{10}}{((x-1)^2)^5} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)^{10}}(x+1)^{10}}{\cancel{(x-1)^{10}}} = 2^{10}$$

$\frac{0}{0}$ **Q5** $\lim_{x\to1} \frac{(x+2)^2-9}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x+2-3)(x+2+3)}{(x-1)(x+1)}$

$= \lim_{x\to1} \frac{x+5}{x+1} = \frac{6}{2} = 3$

Note

$\frac{x-1}{x-1} = 1$
$\frac{1-x}{x-1} = -1$

$\frac{0}{0}$ مرافق **Q6** $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \lim_{x\to0} \frac{\cancel{x^2}+1-1}{(x)(\sqrt{x^2+1}+1)}$

$= \lim_{x\to0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{0}{2} = 0$

$\frac{0}{0}$ مرافق **Q7** $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{1-x} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(1-x)}(\sqrt{x}+1)} = \frac{-1}{\sqrt{x}+1} = -\frac{1}{2}$

Note

ناتج الضرب بالمرافق يساوي المقدار الأول تربيع ناقص المقدار الثاني تربيع بغض النظر عن الاشارة الأصلية

1	2
$1-\sin^2 x = \cos^2 x$	$\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$
$1-\cos^2 x = \sin^2 x$	

$\frac{0}{0}$ مرافق **Q8** $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to0} \frac{1-\cos^2 x}{(\sin x)(1+\cos x)} =$

$= \lim_{x\to0} \frac{\sin^{\cancel{2}} x}{\cancel{\sin x}(1+\cos x)} = \frac{0}{2} = 0$

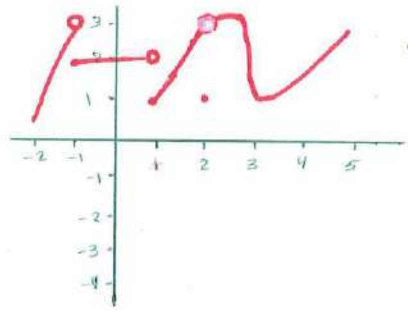
$\frac{\text{عدد}}{0}$ **Q9** $\lim_{x\to3} \frac{x}{x-3} = \pm\infty$ (doesn't exist)

$\frac{\text{عدد}}{0}$ **Q10** $\lim_{x\to3^+} \frac{x}{\underset{3.1}{x-3}} = +\infty$

$\frac{\text{عدد}}{0}$ **Q11** $\lim_{x\to3^-} \frac{x}{\underset{2.9}{x-3}} = -\infty$

$\frac{\text{عدد}}{0}$ **Q12** $\lim_{x\to4^-} \frac{x-2}{\underset{3.9}{4-x}} = \frac{2}{0} = +\infty$

$\frac{\text{عدد}}{0}$ **Q13** $\lim_{x\to5^-} \frac{2-x}{\underset{4.9}{5-x}} = -\frac{3}{0} = -(+\infty) = -\infty$



ملاحظة: النهاية غير موجودة عند الاطراف والانقطاعات .

Note	
$\lim\limits_{+} = \lim\limits_{-}$	exist
$\lim\limits_{+} \neq \lim\limits_{-}$	doesn't exist

Find : 1- $F(2) = 1$

2- $\lim\limits_{x \to 2} F(x)$ < $\lim\limits_{x \to 2^+} F(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to 2^-} F(x) = 3$ > 3

3- $\lim\limits_{x \to 1} F(x)$ < $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = 2$ > D.N.E

4- $\lim\limits_{x \to a} F(x)$ = doesn't exist then a = $x = -2, 4, 1, -1$

---

abs. Value :

Q1 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{|x-2|}{x+3}$ $\quad -(x-2) \quad 2 \quad +(x-2)$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{1}{6}$

Q2 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x-2|}{x+3} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-(x-2)}{x+3} = \dfrac{1}{4}$

Q3 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x-2|}{x+3} =$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{0}{5} = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{0}{5} = 0$

$\Rightarrow 0$

Q4 $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$ $\quad -(x-1) \quad 1 \quad +(x-1)$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{2x}\,\cancel{(x-1)}}{-\cancel{(x-1)}} = \dfrac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$

Q5 $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{|x-3|}{x^2-9}$ $\quad -(x-3) \quad 3 \quad +(x-3) \quad 4$

$= \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{7}$

Note: $|x-2|$ → $+(x-2)$, $-(x-2)$

$$F(x) = \begin{cases} x+3 & , x>1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & , x<1 \\ x+4 & , x=1 \end{cases}$$

Find :-

1- $\lim\limits_{x\to 2} F(x) = \lim\limits_{x\to 2} x+3 = 5$

2- $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{-1}{-1} = 1$

3- $\lim\limits_{x\to 1} F(x)$: $\lim\limits_{x\to 1^+} x+3 = 4$, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = 2$ → D.N.E

4- $F(1) = 1+4 = 5$

5- $F(F(0)) = F(1) = 5$
أو $F \circ F(0)$

Rule :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

Note

نستخدم هذه القاعدة لل $\sin x$, $\tan x$
بشرطين :
١- أن تكون الزاوية تساوي المقام .
٢- أن يكون ذيل النهاية يصفر الزاوية .

Q_1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{5x} = \dfrac{3}{5}$

Q_2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2(x-3)}{4(x-3)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Q_3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sin 5x} = \dfrac{2}{5}$

Q_4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\tan 5x} = \dfrac{4}{5}$

Note

إذا كانت الزاوية مختلفة بنقسم على الزاوية إلى بدنا إياها على البسط والمقام .

Q_5 $\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{\overset{1}{\sin(x-1)}}{(x-1)\underset{\to 2}{(x+1)}} = \frac{1}{2}$

Q_6 $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x + \sin x}{2x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x} - \frac{x}{2x} + \frac{\sin x}{2x}$

$0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

Q_7 $\lim_{x \to 0} \frac{x \tan x}{\sin x^2} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cancel{x} \tan x}{x^{\cancel{2}}}^{1}}{\frac{\sin x^2}{x^2}_{1}} = 1$

Q_8 $\lim_{x \to -2} \frac{\sin(x^3+8)}{x^2+3x+2} \cdot \frac{(x^3+8)}{(x^3+8)}_{1}$

$= \lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x^2+3x+2} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x+1)} = \frac{12}{-1} = -12$

Q_9 $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 7x}{x^2}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 7x}{x^2} = \frac{\sin 7x}{x} \cdot \frac{\sin 7x}{x} = 49$

Q_{10} $\lim_{x \to 4^-} \frac{\sin(x-4)}{|x-4|}$

$-(x-4) \quad \cancel{x}-4$

4

$= \lim_{x \to 4^-} \frac{\sin(x-4)}{-(x-4)} = -1$

Q_{11} $\lim_{x \to 4} \frac{F(x)-2}{x-4} = 10$, Find $F(4)$

$$\frac{F(4)-2}{0} = 10 \Longrightarrow F(4)-2=0$$

$$F(4) = 2$$

Q_{12} $\lim_{x \to 3} h(x)+2 = 5 \Longrightarrow h(x) = 5-2 \Longrightarrow h(x) = 3$

, Find $\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{h(x)+5} = \lim \sqrt{h(3)+5} = \sqrt[3]{\cancel{3+5}} = 2$

* Lopital Rule $\longrightarrow$ If $\lim\limits_{x \to a} \frac{F}{g} = \frac{0}{0}$ then we can use this Rule.

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{F}{g} = \lim_{x \to a} \frac{F'}{g'}}$$

Q1 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x}{1} = 4$

Q2 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{100} - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{100x^{99}}{1} = 100$

Q3 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x . \ln 3}{1} = \ln 3$

نفس الحاجة

$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ك $\nearrow$ $\sec \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

Q4 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2 x}{1} = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^2 = 2$

Q5 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 . F(x) - 8}{x - 2} = 10$, find a) $F(2)$ b) $F'(2)$

$\dfrac{8 . F(2) - 8}{2 - 2} = \dfrac{10}{1} \Longrightarrow 8.F(2) - 8 = 0$

$\dfrac{\cancel{8}F(2)}{\cancel{8}} = \dfrac{\cancel{8}}{\cancel{8}} \Longrightarrow F(2) = 1$ (a)

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 . F'(x) + F(x) . 3x^2}{1} = 8F'(2) + F(2) . 12 = 10$

$8F'(2) + 12 = 10$

$8F'(2) = 10 - 12$

$\dfrac{\cancel{8}F'(2)}{\cancel{8}} = \dfrac{-2}{8} \quad \therefore F'(2) = \dfrac{-1}{4}$ (b)

Vertical Asymptote (V.a)

(تسمى في بعض الاحيان infinite discontinuity point)

اقتران كسري

هي اصفار المقام بعد التحليل والاختصار

(اي ان جواب النهاية لصفر المقام $= \pm\infty$)

$\ln f(x)$

هي اصفار ما داخل ln

Q_1 find vertical asymptote for $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

solution: $f(x) = \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{1}{x+1}$

$V.a \rightarrow x = -1$

Q_2 find V.a asymptote for $f(x) = \frac{2x-x^2}{x^3-4x}$

solution: $f(x) = \frac{\cancel{x}\overset{-1}{\cancel{(2-x)}}}{\cancel{x}\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{-1}{x+2}$

$V.a \rightarrow x = -2$

Q_3 find V.a for $f(x) = \frac{2e^x}{e^x-5}$

solution: $e^x - 5 = 0$

$e^x = 5$

$V.a \rightarrow x = \ln 5$

Q_4 find V.a for $f(x) = \ln(x-3)$

solution: $x = 3$

Q_5 let $f(x) = \frac{x-1}{ax^2-1}$ has vertical asymptote at $x=1$, find a

* بما ان $x=1$ هي V.a اذا هي عبارة عن صفر المقام

$a(1)^2 - 1 = 0$

$a - 1 = 0$

$\boxed{a = 1}$

Q_6 find V.a for $f(x) = \frac{x^2-4}{|x|-12}$

solution: $|x| - 12 = 0$

$|x| = 12$

$x = 12, -12$ are V.a

Q_7 find V.a for $f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2-4}$

solution $f(x) = \frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

لا تعتبر V.a وذلك لان جواب النهاية $x \to 2$ موجودة ولا تساوي $\pm\infty$ (كل اختبار انه تم اختصاره)

V.a

Squeezing Theorm "Sandwish Theorm"

Rule

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

if $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$

then also $\lim_{x \to a} f(x) = L$

→ Case 1 مقارنة جاهزة في السؤال

Q_1 Given $4x-9 \leq f(x) \leq x^2-4x+7$, find $\lim_{x \to 4} f(x)$

$\lim_{x \to 4} 4x-9 = 7$

$\lim_{x \to 4} x^2-4x+7 = 7$

by sqz Thm $\lim_{x \to 4} f(x) = 7$

→ Case 2 اذا كان ناتج التعويض النهائي

يحتوي على $\sin\infty, \cos\infty, \sin^2\infty, \cos^2\infty$

Remember

$$-1 \leq \frac{\sin x}{\cos x} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \leq 1$$

Q_2 find $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$

sqz Thm — $0 . \sin\infty$ التعويض المباشر يعطينا

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$$

$\lim_{x \to 0} -x^2 = 0$

$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$ by sqz Thm

Q_3 if $\frac{4x^2-8x}{x^3-8} \leq 2f(x)-3 \leq \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$, find $\lim_{x\to 2} f(x)$

solution $\lim_{x\to 2} \frac{4x^2-8x}{x^3-8} = \frac{4x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)} = \frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{2}{3}$$

So $\lim_{x\to 2} 2f(x)-3 = \frac{2}{3}$

$\rightarrow \lim 2f(x) = 3+\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$

$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{11}{6}$

Q_4 $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\sin\frac{\pi}{x}} \qquad = 0 \cdot e^{\sin\infty}!$

$-1 \leq \sin\frac{\pi}{x} \leq 1$

$\sqrt{x}e^{-1} \leq \sqrt{x}e^{\sin\frac{\pi}{x}} \leq e^{1}\cdot\sqrt{x}$

$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$

$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot e^{-1} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} e\sqrt{x} = 0$

$\downarrow$

$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\sin\frac{\pi}{x}} = 0$ by sqz Thm

Q_5 find $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin^2\frac{1}{x}$ $= \sin^2\infty$!!

$$0 \le \sin^2\frac{1}{x} \le 1$$

$\lim\limits_{x\to0^+} 0 = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0^+} 1 = 1$

so $\lim\limits_{x\to0^+}\sin^2\frac{1}{x}$ doesn't exist

Q_6 find $\lim\limits_{x\to0^+} x\cos\frac{1}{|x|}$

$$-x \le x\cos\frac{1}{|x|} \le x$$

$\lim -x = 0$ $\qquad$ $\lim x = 0$

$\lim\limits_{x\to0^+} x\cos\frac{1}{|x|} = 0$ by sqz Th'm

Q_7 Given that $2-2x \le f(x) \le x^2+3$, find $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-4}{x+1}$

منحاول نحويل $f(x)$ الى $\frac{f(x)-4}{x+1}$

$$\frac{-2x-2}{x+1} \le \frac{f(x)-4}{x+1} \le \frac{x^2-1}{x+1}$$

$\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{-2x-2}{x+1} =$

$\lim \frac{-2\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}} = -2$

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}}$

$= \lim\limits_{x\to-1}(x-1) = -2$

$\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-4}{x+1} = -2$ by sqz

Continuity الاتصال

الاتصال على نقطة

الاتصال على فترة
interval of continuity

← يعتبر الاقتران متصلاً عند نقطة معينة اذا تحقق الشرط التالي :
النهاية من اليمين = النهاية من اليسار = الصورة

← يعتبر الاقتران متصلاً على مجاله وعليه اذا طلب فترة الاتصال لاقتران معين نجد مجال الاقتران

← الاسئلة غالباً على هذا النوع تكون للاقترانات المتشعبة

Q_1 find interval of continuity for $f(x) = \log_3(x-2)$

solution: $\underset{2}{- - - - - | + + + +}$ interval of cont $= D_f = (0, \infty)$

Q_2 the function $f(x) = \dfrac{x+3}{\frac{1}{x} - 2}$ is cts on ?

$D = \mathbb{R} - \{0, \frac{1}{2}\}$

Q_3 $f(x) = \begin{cases} x+5, & x > 1 \\ 2x+4, & x < 1 \\ 6x, & x = 1 \end{cases}$ is $f(x)$ cts at $x=1$?

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 6$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 6$ so $f(x)$ is cts at $x=1$

$f(1) = 6$

Q_4 find value of k that makes $f(x)$ cts at $x=1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4kx, & x \le 1 \\ \dfrac{k(1-\sqrt{x})}{1-x}, & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 1^+} \frac{k(1-\sqrt{x})}{1-x} = \lim_{x \to 1^+} \frac{k\cancel{(1-\sqrt{x})}}{\cancel{(1-\sqrt{x})}(1+\sqrt{x})} = \frac{k}{2}$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 1^-} x^2+4kx = 1+4k$$

$$1+4k = \frac{k}{2}$$

$$2+8k = k$$

$$\boxed{k = \frac{-2}{7}}$$

Q_5 find value of k that makes $f(x)$ cts everywhere

$$f(x) = \begin{cases} kx-1, & x \le 2 \\ \dfrac{x-2}{x^2-4}, & x > 2 \end{cases}$$

Types of discontinuity

1. Removable discontinuity (hole)

هي اصفار المقام التي يتم اختصارها بحيث $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$

2. infinite discontinuity (vertical asymptote)

هي اصفار المقام بعد التحليل والاختصار بحيث $\lim_{x \to a} f(x) = \pm \infty$

3. Jump

هي اصفار المقام التي يتم اختصارها بحيث $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$
وعادة ماتكون عند اصفار المقام التي يوجد عليها قيمة مطلقة
او الاقترانات المتشعبة

Q_1 find removable discontinuity for $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

$$f(x) = \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

$x = 2$ (removable)
تم اختصارها

$(x = -2$ is V.a)
لم يتم اختصارها

Q_2 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3}, & x > 4 \\ 8-2x, & x \leq 4 \end{cases}$ $x=4$ is Jump, hole or V.a?

$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{x-3} = 1$

$\lim_{x \to 4^-} 8-2x = 0$

$\lim_{+} \neq \lim_{-}$

so Jump

⇒ Horizotal asymphote (h.a)

هو العدد الناتج من النهاية عند الموجب والسالب انفنتي ($\pm\infty$) .

$$\frac{a}{0} = \infty \longrightarrow \frac{a}{\infty} = 0$$

1- $\infty \pm a = \infty$	6- $\infty \cdot \infty = \infty$
2- $\infty \cdot a = \infty$	7- $\infty + \infty = \infty$
3- $\frac{\infty}{a} = \infty$	8- $\infty(-\infty) = -\infty$
4- $\infty^2 = \infty$	9- $-3 \cdot \infty = -\infty$
5- $\sqrt{\infty} = \infty$	10- $1 - \infty = -\infty$

Rule 1

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\text{Poly}}{\text{Poly}} = \frac{\text{أكبر قوة}}{\text{أكبر قوة}}$$ ⇒ اختصار ⇒ تعويض

Q_1 $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \cancel{+3x} \cancel{-2}}{3x^3 \cancel{+5x}} = \frac{x^2}{3x^3} = \frac{1}{3x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ is } \underline{h.a}$$

Q_2 $$\lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{3x^2} + 2x^3 \cancel{+1}}{\cancel{2x} - x^2} = \frac{2x^3}{-x^2} = -2x = -\infty$$

Q_3 $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{2x^2} + 3x^4}{2x^4 \cancel{-2x}} = \frac{3x^4}{2x^4} = \frac{3}{2} \Longrightarrow y = \frac{3}{2} \text{ is } \underline{h.a}$$

Note

١- نتعامل الجذور مثل معاملة كثيرة الحدود بحيث $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$

٢- طريقة اسرع للحل هي:
1. إذا كان البسط أكبر من المقام الجواب مباشرة = $\pm\infty$
2. " " " أصغر " " " " = صفر
3. " " " نفس درجة " " " " = معامل أكبر قوة على معامل أكبر قوة.

٣- $\pm\infty = D.N.E$

Q_4 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^3+\cancel{x^2}}+x}{3x-\cancel{2}} = \dfrac{x^{1.5}+x}{3x} = \dfrac{x^{1.5}}{3x} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{3} = \infty$ درجة البسط أكبر من المقام

Q_5 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x-\cancel{1}}{x+\cancel{1}} = \dfrac{x}{x} = 1$

Q_6 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\overset{x^4\,\cdot\,2x^2\,\cdot\,3x^3}{(x^2+\cancel{1})^2(2x^2)(3x^3+\cancel{2x}+\cancel{1})}}{\underset{3x\,\cdot\,3x^8}{(3x)(3x^8+\cancel{4x}+\cancel{2x})}} = \dfrac{6x^9}{9x^9} = \dfrac{2}{3}$ $y=\frac{2}{3}$ is h.a

Q_7 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{3^x}+4^x}{\cancel{2^x}+5^x} = \dfrac{4^x}{5^x} = 0$

Note

1- $(\sqrt{x})^2 = x$ 2- $\sqrt{x^2} = |x|$

Q_8 Find horizontal asym... $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{3x-2}$

1- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+\cancel{1}}}{3x-\cancel{2}} = \dfrac{2|x|^{x\geq 0}}{3x} = \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$

2- $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+\cancel{1}}}{3x-\cancel{2}} = \dfrac{2|x|^{x\leq 0}}{3x} = \dfrac{-2x}{3x} = \dfrac{-2}{3}$

h.a $-\infty$ — − 0 + — ∞

Q_9 $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+\cancel{1}}+3x}{2x-\cancel{5}}$ $|x| = -x + 3x$ $= \dfrac{2x}{2x} = 1$ is h.a

Q_{10} $\lim_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{x+\cancel{1}}{x-\cancel{2}}\right) = \ln\left(\dfrac{x}{x}\right) = \ln 1 = 0$

Q_{11} $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2}{3-\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)} = \dfrac{2}{3-\ln(1)} = \dfrac{2}{3-0} = \dfrac{2}{3}$

Q_{12} $\lim_{x\to\infty} \tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right) = \tan^{-1}(1) = \dfrac{\pi}{4}$

Rule 2

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{a.b}$$

Q_1 $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x} = e^{(-3)(2)} = e^{-6}$

Q_2 $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{3}{x^3}\right)^{2x^3} = e^{-6}$

شرط ⟸ أن الاكسين يكونوا من نفس الدرجة

Q_3 $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e^{1}$

Q_4 $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x}$

$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Q_5 $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}\right)^{x}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}}{\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}} = \frac{e^{2}}{e^{-3}}$

أو $= e^{2} . e^{3} = e^{5}$

Rule 3

(قاعدة التعويض المباشر)

حفظ

1- $e^{\infty} = \infty$	6- $\tan^{-1} \infty = \frac{\pi}{2}$
2- $e^{-\infty} = 0$	7- $\tan^{-1} -\infty = -\frac{\pi}{2}$
3- $\ln \infty = \infty$	8- $\ln 0^{+} = -\infty$
4- $\ln -\infty =$ D.N.E	9- $\ln 0^{-} =$ D.N.E
5- $\ln 1 = 0$	10- $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

Q_1 $\lim\limits_{x \to \infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

Q_2 $\lim\limits_{x \to \infty} e^{x-x^2} = e^{(x)(1-x)} = e^{(\infty)(-\infty)} = e^{-\infty} = 0$

ملاحظة 8 عند التعويض المباشر إذا نتج $(\infty - \infty)$

- عامل مشترك
- ضرب المرافق لل $\sqrt{\ }$ فقط
- توحيد مقامات لعدة كسور
- $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

Q_3 $\lim\limits_{x \to \infty} \tan^{-1}(x^2 - x^4) = \lim\limits_{x \to \infty} \tan^{-1} \underbrace{(\underset{\infty}{x^2})(\underset{-\infty}{1-x^2})}_{-\infty} = \tan^{-1} -\infty = \frac{-\pi}{2}$

Q_4 $\lim\limits_{x \to 0^+} \tan^{-1}(\ln x) = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

Q_5 $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{(x^2-9)} = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{(x+3-1)}{x^2-9} = \frac{x+2}{x^2-9} = \frac{5}{0} = +\infty$

Q_6 $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x+1) - \ln(x-2) = \lim\limits_{x \to \infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \ln(1) = 0$

Q_7 Find (h.a) $F(x) = \sqrt{x^2+1} + x$

$\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2+1} + x = \infty + \infty = \infty$

??

$\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+1}) + (x) \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} - x}$ $\quad \infty \cdot \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} - x} = \frac{1}{\infty} = 0 \implies y = 0$ is h.a

Rule 4

$\rightarrow$ squeezing Theorm

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = \sin \infty = 0$$

ملاحظة : إذا كان ناتج التعويض المباشر داخل النهاية يحتوي على $\sin\infty$, $\cos\infty$ الجواب مباشرة $=0$

Rule 5

$$\rightarrow \lim_{x \to \infty} x \sin \frac{a}{x} = a$$

Q_1 $\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{4}{x} = 4$

Intermediate Value Theorm (IVT)

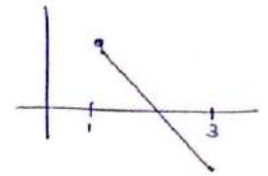
← عادة ما تكون الاسئلة على هذه النظرية "how many root/solution"

والمقصود بهذا السؤال هو تحديد كم مرة يقطع الاقتران x-axis

Q_1 $f(1)=2$, $f(3)=-1$, $f(x)$ is cts at $[1,3]$. how many root?

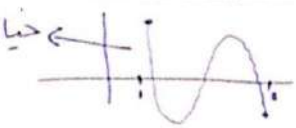
a- at least one b- at most one c- exactly one d- two roots

solution:



← افضل طريقة لحل هذا الاسئلة هي الرسم حيث نلاحظ من خلال الرسم اننا قطعنا x-axis مرة واحدة على الاقل عند التوصيل بين 1, 3

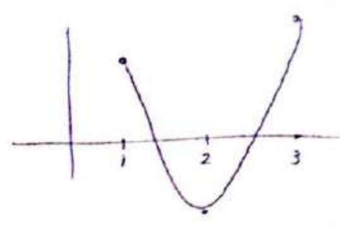
خيار آخر للتوصيل ←



Q_2 $f(1)>0$, $f(2)<0$, $f(3)>0$, $f(x)$ is cts $[1,3]$, how many root?

a- at least one b- at least two c- exactly one d- exactly two

solution



ans is b (at least two solutions)

Q_3 The equation $x^3 + 3x = 2$ has solution in:

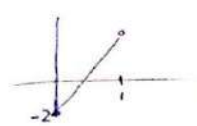
a- [1,3] b- [1,2] c- [2,3] d- [0,1]

solution: $f(x) = x^3 + 3x - 2$

← لتحديد الفترة التي يوجد فيها عدد يقطع x-axis يجب ان يكون ناتج تعويض احد حدود الفترة موجب وناتج تعويض الحد الآخر سالب

$f(0) = -2 < 0$

$f(1) = 2 > 0$ so ans is d- [0,1]

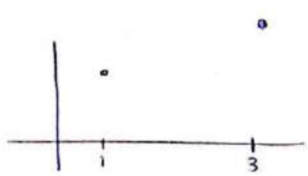


Q_4 f(x) is cts function, $f(1)=2$, $f(3)=3$, using IVT, $f(x)=5$ must have at least two solutions in the Interval (1,3) if

a- $2 \le f(2) \le 3$ c- $f(2) \le 2$ e- $f(2) > 5$

b- $3 \le f(2) < 5$ d- $f(2) < 2$

solution



← نلاحظ انه لضمان الحصول على 2 roots يجب ان تكون صورة 2 سالبة وبناء عليه فان الاجابة الاكثر صحة هي

d- $f(2) < 2$